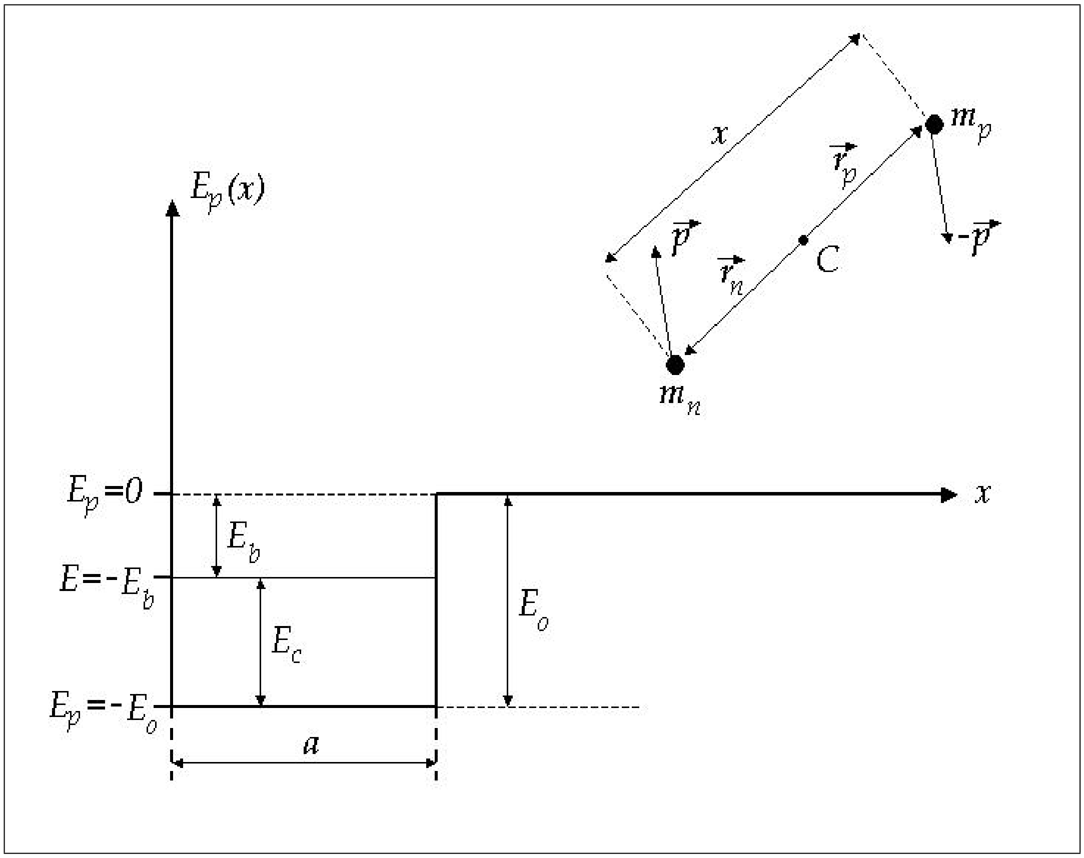
El deuterón

Mediante experimentos de dispersión se sabe que el deuterón tiene un diámetro aproximado de 3,024 Fermi. Calcular usando la mecánica cuántica del pozo de potencial cuadrado las velocidades del protón y el neutrón que forman este núcleo en su estado fundamental.

Solución



Datos:

$$a = 3,024 \cdot 10^{-15}\, m$$

$$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s$$

$$c = 2,998 \cdot 10^{8}\, \frac{m}{s}$$

$$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}\, kg$$

$$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}\, kg$$

$$m_d = 3,343 \cdot 10^{-27}\, kg$$

Supondremos que la energía potencial $E_p(x)$ entre las dos partículas sólo depende de la distancia $x = |\vec{r}_p - \vec{r}_n|$ entre ambas. Aproximaremos esta energía potencial por un pozo de potencial cuadrado de profundidad E_0 y anchura a mediante la función definida a trozos

$$E_p(x) = \begin{cases} -E_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Desde el sistema de referencia centro de masas las dos partículas tienen momentos opuestos $\vec{p}$ y $-\vec{p}$, por lo que la energía cinética del sistema se puede escrbir como

$$E_c = \frac{p^2}{2m_p} + \frac{p^2}{2m_n} = \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_n}\right)$$

y la energía total

$$E = E_c + E_p(x) = \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_n}\right) + E_p(x)$$

Definimos la masa reducida del sistema como

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_n} \Rightarrow \mu = 8,37 \cdot 10^{-28}\, kg$$

Con esta definición la energía del deuterón se reduce a la de una sola partícula con la masa reducida atrapada en el pozo de potencial, esto es

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + E_p(x)$$

La energia E de la partícula en el pozo es igual a la energía de ligadura del sistema E_b cambiada de signo, o sea

$$E = -E_b$$

Esta energía de ligadura es la que hay que dar al sistema para seperar al protón del neutrón, y por tanto, también es la energía que emite el deuterón al formarse; podemos, entonces, calcularla a partir de las masas. Así pues

$$E_b = (m_p + m_n - m_d)\, c^2 = 4,494 \cdot 10^{-13}\, J$$

Pasamos ahora a resolver la ecuación de Schrödinger en las dos regiones $0 < x < a$ y $a < x$. En la primera región se tiene

$\underline{0 < x < a}$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + E_p(x) \cdot \Psi_1 = E\Psi_1$$

En esta región $E_p(x) = -E_0$ y $E = -E_b$, por lo que

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} - E_0\Psi_1 = -E_b\Psi_1 \Rightarrow \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{2\mu\,(E_0 - E_b)}{\hbar^2}\Psi_1 = 0$$

Como la energía cinética es $E_c = E - E_p = E_0 - E_b$, definiendo la constante k_1 en la forma

$$k_1^2 = \frac{2\mu E_c}{\hbar^2}$$

la ecuación de Schrödinger queda

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + k_1^2\Psi_1 = 0$$

La ecuación secular para esta ecuación diferencial es

$$r^2 + k_1^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ik_1$$

Con estas dos raices imaginarias fabricamos la solución general como combinación lineal de exponenciales

$$\Psi_1 = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$

con A y B constantes de integración. La función de onda no tiene sentido físico para $x \leq 0$, pues esta variable es una distancia y no puede ser negativa. Por tanto, imponemos la condición de contorno

$$\Psi_1(0) = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow \Psi_1 = A\left(e^{ik_1x} - e^{-ik_1x}\right) = 2iA\left(\frac{e^{ik_1x} - e^{-ik_1x}}{2i}\right) = 2iA\,\mathrm{sen}(k_1x)$$

y llamando $C = 2iA$, la función de onda en esta primera región es

$$\Psi_1 = C\,\mathrm{sen}(k_1x)$$

Para la segunda región la ecuación de Schrödinger es

<u>$a < x$</u>

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + E_p(x)\cdot\Psi_2 = E\Psi_2$$

En esta región $E_p(x) = 0$ y $E = -E_b$, por lo que

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} = -E_b\Psi_2 \Rightarrow \frac{d^2\Psi_2}{dx^2} - \frac{2\mu E_b}{\hbar^2}\Psi_2 = 0$$

Definiendo la constante k_2 en la forma

$$k_2^2 = \frac{2\mu E_b}{\hbar^2}$$

la ecuación de Schrödinger queda

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} - k_2^2\Psi_2 = 0$$

La ecuación secular para esta ecuación diferencial es

$$r^2 - k_2^2 = 0 \Rightarrow r = \pm k_2$$

Con estas dos raices reales fabricamos la solución general como combinación lineal de exponenciales

$$\Psi_2 = Fe^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$$

con F y D constantes de integración. En esta región la energía pencial $E_p = 0$ es mayor que la energía total $E = -E_b$, por lo que según la mecánica clásica es una zona de movimiento prohibido. Entonces, la función de onda no puede crecer en esta región, y por tanto imponemos la condición de contorno

$$\lim_{x \to \infty} \Psi_2 = 0 \Rightarrow F = 0$$

con lo que la función de onda en esta segunda región queda

$$\Psi_2 = De^{-ik_2x}$$

Imponiendo la continuidad en la frontera $x = a$, encontramos la condición

$$\Psi_1(a) = \Psi_2(a) \Rightarrow C\,\mathrm{sen}(k_1a) = De^{-k_2a}$$

e imponiendo la derivabilidad

$$\frac{d\Psi_1(a)}{dx} = \frac{d\Psi_2(a)}{dx} \Rightarrow k_1C\cos(k_1a) = -k_2De^{-k_2a}$$

Dividiendo estas dos condiciones miembro a miembro, tenemos

$$\tan(k_1a) = -\frac{k_1}{k_2}$$

Sustituyendo los valores de k_1 y k_2 , se tiene

$$\tan\left(a\sqrt{\frac{2\mu E_c}{\hbar^2}}\right) = -\sqrt{\frac{2\mu E_c}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu E_b}} = -a\sqrt{\frac{2\mu E_c}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu a^2 E_b}}$$

Llamando

$$y = a\sqrt{\frac{2\mu E_c}{\hbar^2}}$$

y calculando

$$\sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu a^2 E_b}} = 1,272$$

obtenemos la acuación trascendente

$$\tan y = -1,272\,y$$

que ha de ser resuelta mediante una computadora. Aquí la vamos a resolver por aproximación dentro de la incertidumbre que nos permite el principio de Heisenberg.

Como buscamos el estado fundamental, hemos de escoger el valor más pequeño, pero rechazando la solución nula ya que

$$y = 0 \Rightarrow E_c = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \Rightarrow \Psi_1(x) = 0$$

Para ello vamos a aproximar el seno y el coseno por su desarrollo en serie de Taylor como sigue

$$\operatorname{sen} y \simeq y - \frac{y^3}{6}$$
$$\cos y \simeq 1$$

Con esto la ecuación trascendente se convierte en un polinomio de segundo grado

$$\tan y = -1,272\, y \Rightarrow y - \frac{y^3}{6} \simeq -1,272y \Rightarrow 1 - \frac{y^2}{6} \simeq -1,272 \Rightarrow y \simeq 2,132$$

Este valor nos permite calcular E_c

$$y = a\sqrt{\frac{2\mu E_c}{\hbar^2}} \Rightarrow E_c = \frac{y^2\hbar^2}{2\mu a^2} = 3,305 \cdot 10^{-12}\, J$$

Como

$$E_c = \frac{p^2}{2\mu} \Rightarrow p^2 = 2\mu E_c$$

la energía cinética para el protón es

$$E_{cp} = \frac{p^2}{2m_p} = \frac{\mu E_c}{m_p}$$

y su velocidad

$$v_p = \sqrt{\frac{2E_{cp}}{m_p}} = \frac{\sqrt{2\mu E_c}}{m_p} = 4,446 \cdot 10^7\, \frac{m}{s}$$

Un cáculo análogo da para el neutrón

$$v_n = \frac{\sqrt{2\mu E_c}}{m_n} = 4,441 \cdot 10^7\, \frac{m}{s}$$

Estos valores llevan una incertidumbre asociada Δv que podemos estimar mediante el principio de Heisenberg

$$\Delta p \Delta x \simeq \frac{\hbar}{2}$$

Tomando como incertidumbre en la posición el diámetro nuclear, $\Delta x \simeq a$, y poniendo $\Delta p \simeq m_p \Delta v$, encontramos

$$\Delta v \simeq \frac{\hbar}{2am_p} = 1,043 \cdot 10^7\, \frac{m}{s} \simeq 1 \cdot 10^7\, \frac{m}{s}$$

Con esto el valor verdadero que hemos encontrado para las velocidades es

$$v_p \simeq v_n = 4 \cdot 10^7\, \frac{m}{s} \pm 1 \cdot 10^7\, \frac{m}{s}$$