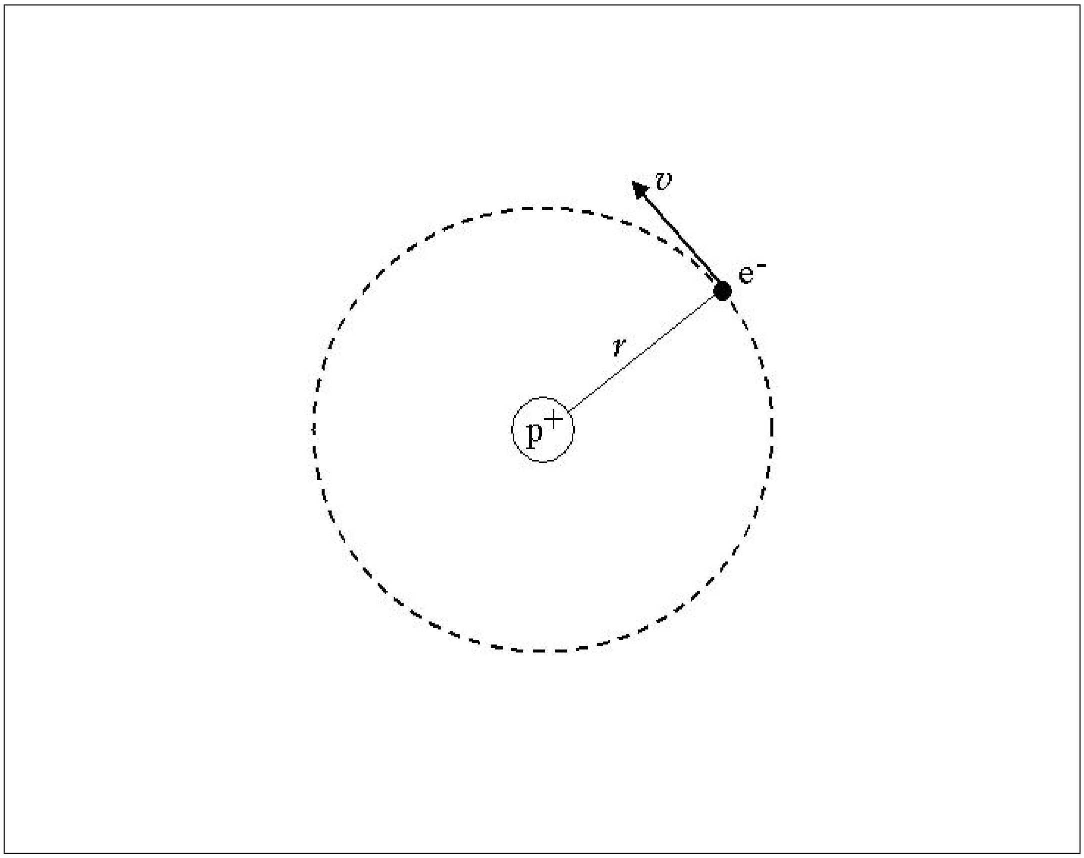
Principio de Heisenberg

Usando el principio de incertidumbre de Heisenberg, estimar el tamaño del átomo de hidrógeno, su energía y la velocidad del electrón.

Solución



Datos:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s$$

$$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}\, kg$$

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19}\, C$$

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\, \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Si Δx y Δp son los errores o incertidumbres que se cometen al medir la posición y el momento del electrón, entonces el principio de incertidumbre establece que

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

Tomaremos como incertidumbre en la posición el radio r del átomo y vamos a coger como medida la propia incertidumbre, que supondremos es la menor posible. Entonces escribimos

$$\Delta x \simeq r \ , \ \Delta p \simeq p \ \Rightarrow pr \simeq \hbar$$

Poniendo

$$r \simeq \frac{\hbar}{p}$$

en la energía clásica del electrón, obtenemos la aproximación

$$E = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \simeq \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2 p}{4\pi\epsilon_0\hbar}$$

El sistema será estable en el estado de mínima energía, por tanto anulamos la primera derivada

$$\frac{dE}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{p}{m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} = 0 \Rightarrow p_0 \simeq \frac{e^2 m_e}{4\pi\epsilon_0\hbar}$$

con lo que la velocidad del electrón es aproximadamente

$$v_0 = \frac{p_0}{m_e} \simeq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} = 2,186 \cdot 10^6 \,\frac{m}{s} \simeq 8 \cdot 10^6 \,\frac{km}{h}$$

con esta velocidad el electrón tardaría unos 18 segundos en dar la vuelta a la Tierra.

El radio de la órbita es del orden de

$$r_0 \simeq \frac{\hbar}{p_0} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 5,297 \cdot 10^{-11}\, m \simeq 0,5 \cdot 10^{-10}\, m$$

por lo que en un milímetro se pueden alinear 10 millones de átomos.

Para la energía encontramos el valor

$$E \simeq \frac{p_0^2}{2m_e} - \frac{e^2 p_0}{4\pi\epsilon_0\hbar} = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -2,177 \cdot 10^{-18}\, J \simeq -13,6\, eV$$

que es efectivamente la energía de ligadura que se obtiene con el modelo de Bohr.