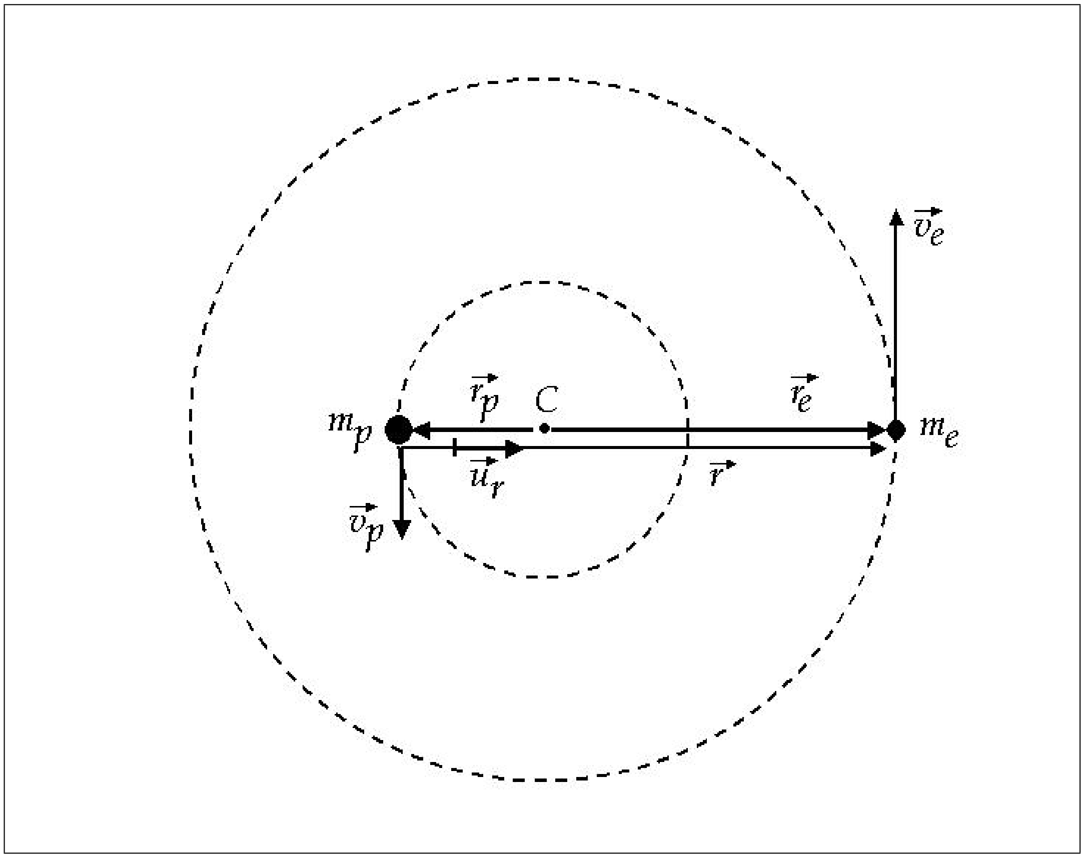
Agua pesada

Estudiar como influye el movimiento del protón en la energía de ligadura del átomo de hidrógeno. Calcular la diferencia que existe entre el hidrógeno y el deuterio para la línea espectral correspondiente a la transición de $n = 2$ a $n = 1$.

Solución



Datos:

$$m_p = 1,67262 \cdot 10^{-27}\, kg$$

$$m_e = 9,10939 \cdot 10^{-31}\, kg$$

$$m_d = 3,34359 \cdot 10^{-27}\, kg$$

$$e = 1,60218 \cdot 10^{-19}\, C$$

$$\epsilon_0 = 8,85418 \cdot 10^{-12}\, \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

$$h = 6,62608 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s$$

$$c = 2,99793 \cdot 10^8\, \frac{m}{s}$$

Si ponemos el sistema de referencia en el centro de masas C del átomo de hidrógeno, la energía del protón y electrón es

$$E = \frac{1}{2}m_p v_p^2 + \frac{1}{2}m_e v_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

donde v_p, v_e son las velocidades respectivas y r es la distancia entre las dos partículas. En este sistema de referencia el momento total es nulo, por lo que se cumple

$$m_p v_p = m_e v_e \Rightarrow v_p = \frac{m_e}{m_p} v_e \simeq \frac{v_e}{2000} \Rightarrow E \simeq \frac{1}{2} m_e v_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

esto es, al ser el protón unas dos mil veces más pesado, su velocidad es mucho menor y en una primera aproximación se desprecia, que fue lo que hizo Bohr en su modelo de 1913 para obtener la energía cuantizada

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

Ahora vamos a tener en cuenta el movimiento del núcleo para refinar el modelo. Para ello escribimos la segunda ley de Newton para cada partícula

$$m_e \frac{d^2\vec{r}_e}{dt^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

$$m_p \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

siendo $\vec{r}_e$, $\vec{r}_p$ las respectivas posiciones respecto al centro de masas y $\vec{u}_r$ el vector unitario que apunta en la dirección que va del protón al electrón. Dividiendo por las masas y restando la segunda ecuación de la primera, se tiene

$$\frac{d^2\vec{r}_e}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} = -\frac{e^2}{m_e 4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r - \frac{e^2}{m_p 4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r = -\left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}\right)\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Poniendo

$$\frac{d^2\vec{r}_e}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

y llamando

$$\frac{1}{\mu_h} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}$$

con $\mu_h = 9,10436 \cdot 10^{-31}\,kg$ la masa reducida del átomo de hidrógeno, se tiene

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{e^2}{\mu_h 4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r \Rightarrow \mu_h \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Así pues, el problema de las dos partículas en mutua interacción se ha reducido al de una sola partícula sometida a la misma fuerza pero con la masa reducida.

Entonces, para la energía del sistema podemos usar la fórmula de Bohr, pero sustituyendo la masa del electrón por la masa reducida, esto es

$$E_n^h = -\frac{\mu_h e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

De aquí obtenemos la energía del fotón emitido correspondiente a la transición $n = 2 \longrightarrow n = 1$

$$\Delta E_h = E_2^h - E_1^h = \frac{\mu_h e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3\mu_h e^4}{32\epsilon_0^2 h^2} = 1,63401 \cdot 10^{-18}\, J$$

Análogamente podemos encontrar la energía para la misma transición en el deuterio, pero poniendo ahora la masa reducida correspondiente

$$\mu_d = \frac{m_e m_d}{m_e + m_d} = 9,10684 \cdot 10^{-31}\, kg$$

con m_d la masa del deuterón.

$$\Delta E_d = \frac{3\mu_d e^4}{32\epsilon_0^2 h^2} = 1,63446 \cdot 10^{-18}\, J$$

Para estas transiciones las longitudes de onda de la radiación emitida son

$$\lambda_h = \frac{hc}{\Delta E_h} \ , \ \lambda_d = \frac{hc}{\Delta E_d}$$

y por tanto, entre las lineas de emisión de estos dos isótopos existe una pequeña diferencia

$$\Delta\lambda = \lambda_h - \lambda_d = hc\left(\frac{1}{\Delta E_h} - \frac{1}{\Delta E_d}\right) = 3,34705 \cdot 10^{-11}\, m$$

que se denomina desplazamiento isotópico.

Aunque es muy pequeño, el desplazamiento isotópico fue observado en los espectros de emisión por primera vez en 1932 por Harold Urey, lo que le llevó a descubrir el deuterio y el agua pesada.