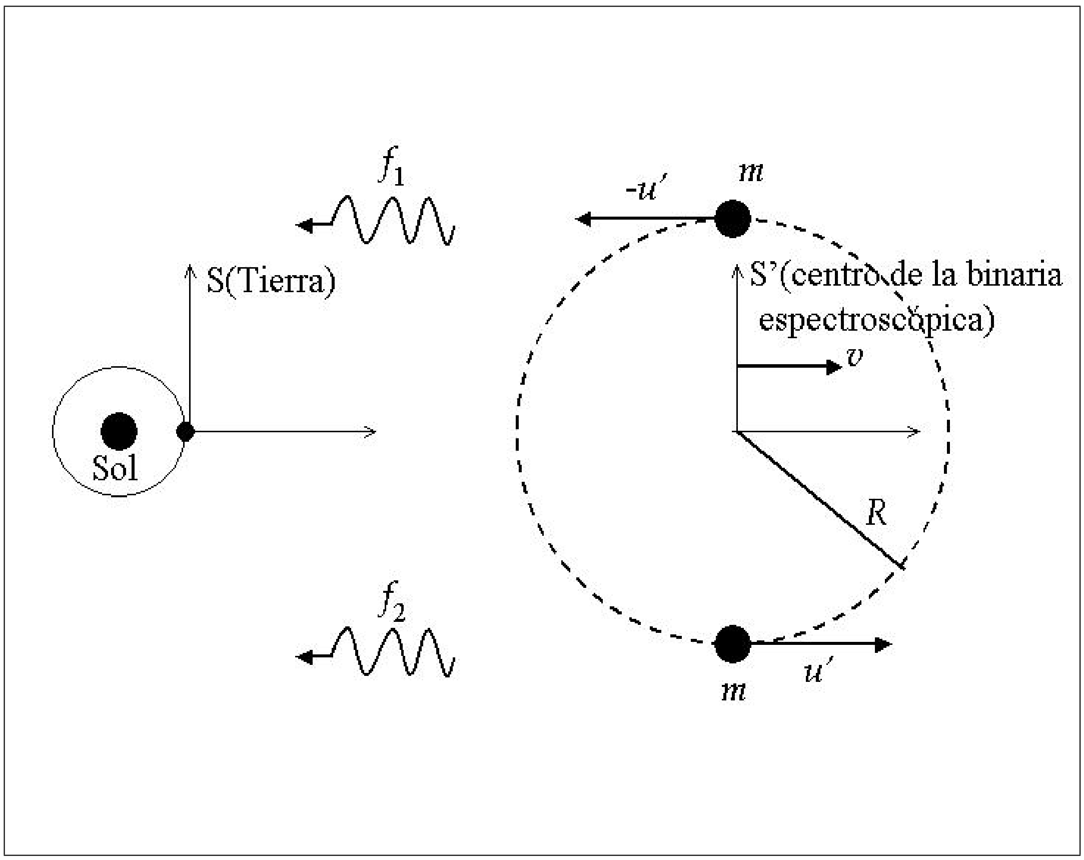
Estrella binaria

Con un telescopio se observa la luz procedente de un sistema denominado binaria espectroscópica compuesto por dos estrellas idénticas que rotan alrededor del centro de masas común y con el plano de la órbita conteniendo la línea visual. La luz procedente del Sol contiene una frecuencia de $4,5679 \cdot 10^{14}\,Hz$ correspondiente al hidrógeno gaseoso, mientras que en la luz procedente de una de las estrellas que componen la binaria espectroscópica se observa que la misma línea espectral oscila entre las frecuencias $4,5685 \cdot 10^{14}\,Hz$ y $4,5661 \cdot 10^{14}\,Hz$ con un periodo de 90 días. Determinar la velocidad a la que se aleja este sistema estelar, la velocidad orbital de las estrellas, el radio de su órbita y su masa.

<u>Solución</u>



Datos:

$$f_0 = 4,5679 \cdot 10^{14}\,Hz$$

$$f_1 = 4,5685 \cdot 10^{14}\,Hz$$

$$f_2 = 4,5661 \cdot 10^{14}\,Hz$$

$$T = 90\,\text{días}$$

$$c = 2,9979 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}$$

$$G = 6,6726 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$$

Sea S el sitema de referencia terrestre y S' el que se mueve con el centro de masas de las estrellas que forman la binaria espectroscópica. Llamemos u_1 al módulo de la velocidad máxima con que se ve acercarse una de las estrellas a la Tierra, entonces debido al efecto Doppler la frecuencia f_1 que se observa es

$$f_1 = \sqrt{\frac{c+u_1}{c-u_1}}f_0$$

donde f_0 es la misma línea espectral observada en el Sol. De esta fórmula se despeja que

$$u_1 = \frac{c\left(f_1^2 - f_0^2\right)}{f_1^2 + f_0^2} = \frac{2,9979 \cdot 10^8\left(4,5685^2 - 4,5679^2\right)}{4,5685^2 + 4,5679^2} = 3,9375 \cdot 10^4\,\frac{m}{s}$$

Si u_2 es la velocidad máxima con que se aleja una de las estrellas, la frecuencia que se observa ahora es

$$f_2 = \sqrt{\frac{c-u_2}{c+u_2}}f_0 \Rightarrow u_2 = \frac{c\left(f_0^2 - f_2^2\right)}{f_0^2 + f_2^2} = \frac{2,9979 \cdot 10^8\left(4,5679^2 - 4,5661^2\right)}{4,5679^2 + 4,5661^2} = 1,1816 \cdot 10^5\,\frac{m}{s}$$

Seguidamente utilizaremos estos valores hallados u_1 y u_2 para calcular la velocidad v a la que es aleja el sistema S'. Para ello llamaremos u' al módulo de la velocidad orbital de las estrellas respecto del sitema S' y usaremos la transformación de Lorentz de velocidades

$$\mathcal{V}' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

poniendo $\mathcal{V}' = -u'$ y $u = -u_1$ se tiene

$$-u' = \frac{-u_1 - v}{1+\frac{u_1 v}{c^2}}$$

poniendo $\mathcal{V}' = u'$ y $u = u_2$ se tiene

$$u' = \frac{u_2 - v}{1-\frac{u_2 v}{c^2}}$$

eliminando u' entre estas dos expresiones, encontramos

$$\frac{u_1+v}{1+\frac{u_1 v}{c^2}} = \frac{u_2 - v}{1-\frac{u_2 v}{c^2}}$$

de donde se despeja la velocidad con que se aleja el sistema estelar

$$v = \frac{\sqrt{c^4 - c^2\left(u_1^2+u_2^2\right) + u_1 u_2} - c^2 + u_1 u_2}{u_1 - u_2} = \frac{\sqrt{c^4 - c^2\left(u_1^2+u_2^2\right) + u_1 u_2}}{u_1 - u_2} + \frac{-c^2 + u_1 u_2}{u_1 - u_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(2,9979 \cdot 10^8\right)^4 - \left(2,9979 \cdot 10^8\right)^2\left[\left(3,9375 \cdot 10^4\right)^2 + \left(1,1816 \cdot 10^5\right)^2\right] + \left(3,9375 \cdot 1,1816 \cdot 10^9\right)^2}}{3,9375 \cdot 10^4 - 1,1816 \cdot 10^5} +$$

$$+\frac{-\left(2,9979\cdot 10^{8}\right)^{2}+3,9375\cdot 1,1816\cdot 10^{9}}{3,9375\cdot 10^{4}-1,1816\cdot 10^{5}}=3,9393\cdot 10^{4}\,\frac{m}{s}$$

La velocidad orbital la hallamos sustituyendo en

$$u'=\frac{\left(u_2-v\right)c^2}{c^2-u_2 v}=\frac{\left(1,1816\cdot 10^{5}-3,9393\cdot 10^{4}\right)\left(2,9979\cdot 10^{8}\right)^{2}}{\left(2,9979\cdot 10^{8}\right)^{2}-1,1816\cdot 3,9393\cdot 10^{9}}=7,8767\cdot 10^{4}\,\frac{m}{s}$$

Si T' es el periodo orbital respecto del sistema S', la velocidad orbital se puede poner

$$u'=\frac{2\pi R}{T'}$$

siendo R el radio de la órbita. Desde la Tierra el periode se ve dilatado

$$T=\frac{T'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

con lo que

$$u'=\frac{2\pi R}{T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow R=\frac{u'T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{2\pi}=$$

$$=\frac{7,8767\cdot 10^{4}\cdot 90\cdot 24\cdot 60\cdot 60}{2\pi}\sqrt{1-\frac{\left(3,9393\cdot 10^{4}\right)^{2}}{\left(2,9979\cdot 10^{8}\right)^{2}}}=9,7481\cdot 10^{10}\,m$$

que es aproximadamente $\frac{2}{3}$ de la distancia de la Tierra al Sol.

La masa de las estrellas la obtenemos igualando la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta

$$\frac{Gm^2}{4R^2}=\frac{m\left(u'\right)^2}{R}\Rightarrow m=\frac{\left(u'\right)^2 4R}{G}=\frac{\left(7,8767\cdot 10^{4}\right)^{2}\cdot 4\cdot 9,7481\cdot 10^{10}}{6,6726\cdot 10^{-11}}=3,6255\cdot 10^{31}\,Kg$$

que corresponde a unas 18 veces la masa solar.