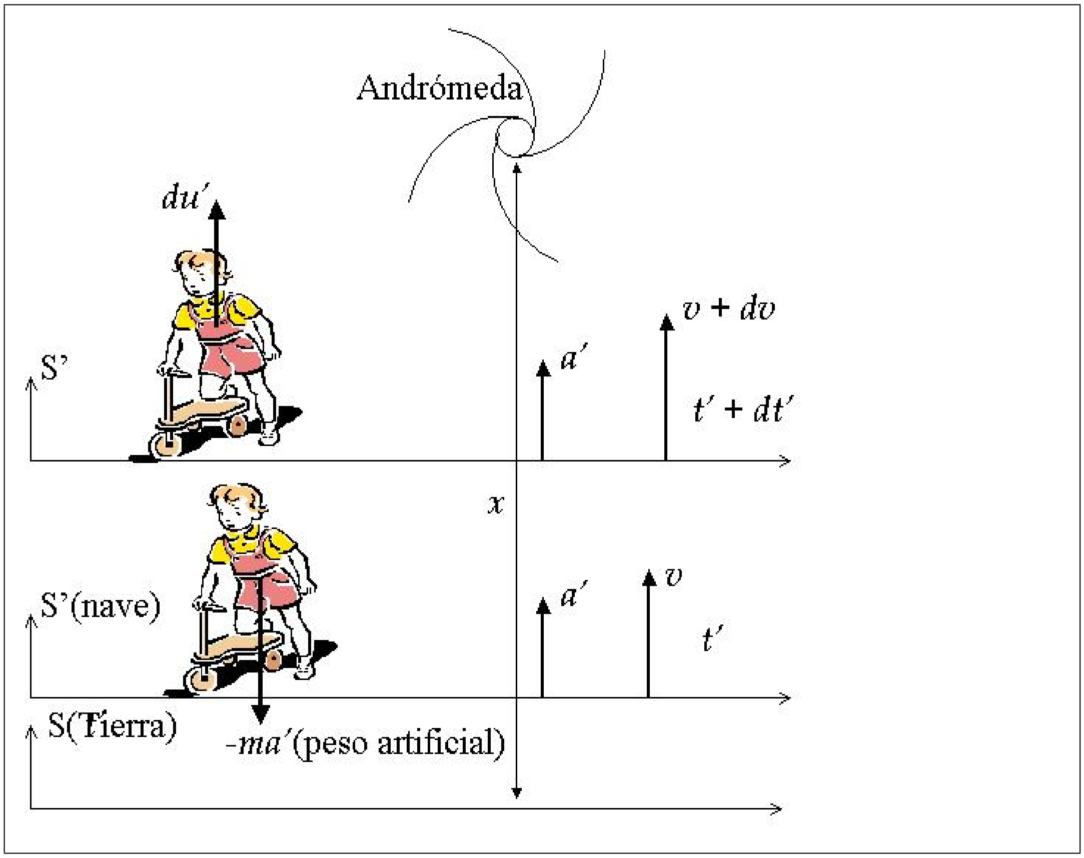
Viaje intergaláctico

Se quiere enviar una colonia reproductora de seres humanos a un planeta análogo a la Tierra situado en la galaxia Andrómeda que dista dos millones de años-luz. Para evitar los efectos nocivos que sobre el organismo produce la ingravidez a largo plazo, la nave está acelerada de forma que los cosmonautas están sometidos a una gravedad artificial de igual valor que la natural sobre la superficie terrestre. Calcular la edad máxima que tendrán los niños nacidos durante el viaje al llegar a Andrómeda.

Solución



Datos:

$$a' = 9,81\,\frac{m}{s^2}$$

$$x = 2 \cdot 10^6 \text{ años-luz}$$

$$c = 2,998 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

El sistema de referencia S' que se mueve con la nave no es inercial debido a que está acelerado, sin embargo supondremos que durante un tiempo infinitesimal dt' el cambio de velocidad dv es tan pequeño que se puede seguir aplicando la transformación de Lorentz. Sea S' el sistema de referencia en el que la nave se encuentra en reposo en el instante t' y sometida a la aceleración a' respecto de S'. La transformación de Lorentz de velocidades es

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

Tras un tiempo dt' de aceleración, obtenemos el incremento de velocidad diferenciando esta expresión pero despreciando la variación de v que supondremos constante durante este tiempo de aceleración

$$du' = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)du}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2}$$

Ahora ponemos $u = v$ pues inicialmente la nave estaba en reposo en S' y se observaba desde S con la velocidad de arrastre v

$$du' = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{dv}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

El incremento de velocidad du' se puede poner en función de la aceleración como $du' = a'dt'$, con lo que

$$a'dt' = \frac{dv}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Suponiendo que se parte del reposo en $t' = 0$, integrando se tiene

$$c^2 \int_0^v \frac{dv}{c^2-v^2} = a' \int_0^{t'} dt' \Rightarrow c \operatorname{arg\,tanh} \frac{v}{c} = a't' \Rightarrow \frac{v}{c} = \tanh \frac{a't'}{c}$$

El desplazamiento de la nave se puede escribir como

$$x = \int_0^t v\, dt$$

pero por la transformación de Lorentz para el tiempo tenemos que

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

con lo que el desplazamiento queda

$$x = \int_0^{t'} v \frac{dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ahora ponemos dt' en función de v usando la expresión que teníamos

$$a'dt' = \frac{dv}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow dt' = \frac{c^2 dv}{a'\left(c^2-v^2\right)}$$

de modo que el desplazamiento se reduce al cálculo de la integral

$$x = \frac{c^3}{a'} \int_0^v \frac{v}{(c^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}} dv = \frac{c^3}{a'} \left[\frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{1}{c} \right]$$

Antes habíamos obtenido la fórmula

$$\frac{v}{c} = \tanh \frac{a't'}{c}$$

de la que podemos despejar el coseno hiperbólico teniendo en cuenta que

$$\cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cosh^2 \alpha = \frac{1}{1 - \tanh^2 \alpha} \Rightarrow \cosh \frac{a't'}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

con este resultado el desplazamiento toma la forma final

$$x = \frac{c^2}{a'} \left(\cosh \frac{a't'}{c} - 1 \right)$$

de la que podemos despejar el transcurrir del tiempo para los cosmonautas

$$t' = \frac{c}{a'} \operatorname{arg\,cosh} \left(1 + \frac{xa'}{c^2} \right) = \frac{2,998 \cdot 10^8}{9,81} \operatorname{arg\,cosh} \left(1 + \frac{9,81 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{2,998 \cdot 10^8} \right) =$$

$$= 4,655 \cdot 10^8 \, s = 14,762 \text{ años}$$

Por tanto los niños al llegar a Andrómeda no superarán los catorce años aproximadamente, aunque sus abuelos murieron en la Tierra más de dos millones de años antes.