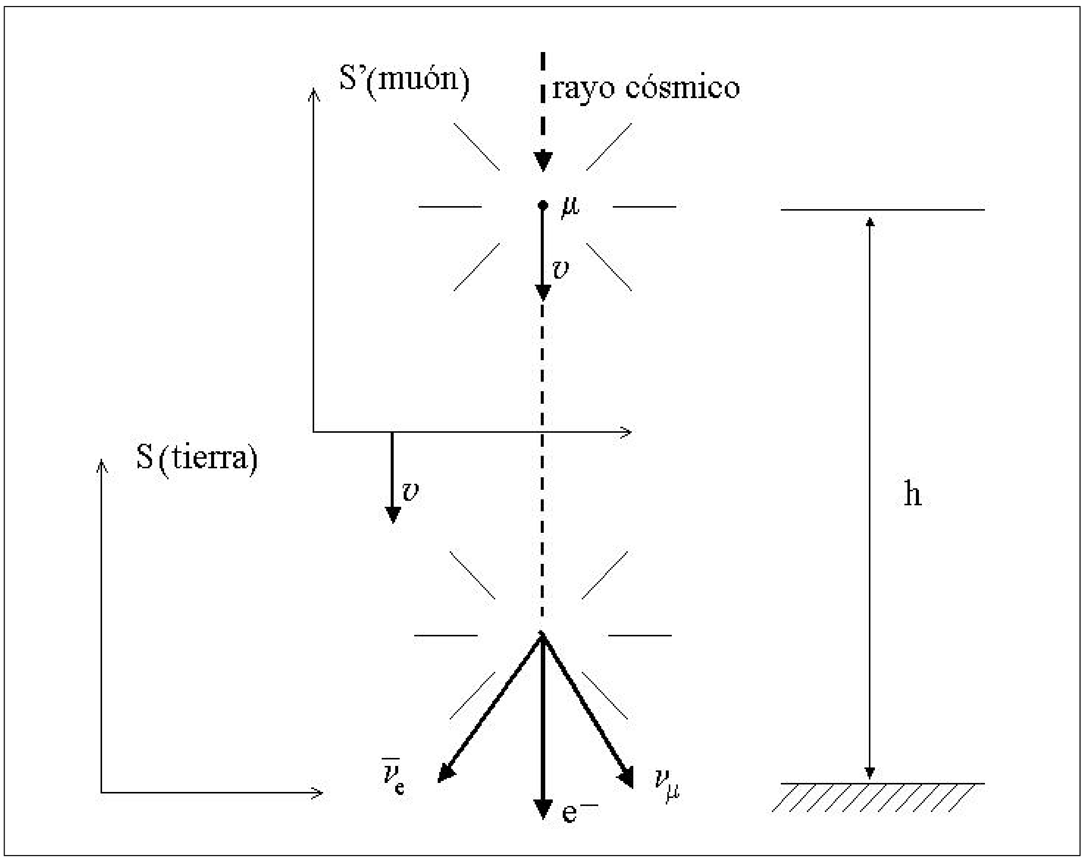
Dilatación del tiempo

En los aceleradores de partículas se generan artificialmente muones (μ^-) que se desintegran en electrones (e^-), neutrinos electrónicos ($\overline{\nu}_e$) y neutrinos muónicos (ν_μ) con una vida media de dos millonésimas de segundo.

$$\mu \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$$

A nuevemil metros de altura los muones se producen de forma natural por choque de los rayos cósmicos con los átomos de la atmósfera. Calcular de cada cien millones de muones formados en la alta atmósfera cuántos llegan a la superficie terrestre si se mueven respecto a ésta a una velocidad de 0,998 veces la de la luz.

Solución



Datos:

$$h = 9 \cdot 10^3\, m$$

$$N_0 = 10^8$$

$$\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6} s$$

$$v = 0,998\, c$$

$$c = 2,997 \cdot 10^8\, \frac{m}{s}$$

Primero deduciremos la ley de desintegración radiactiva. Estadísticamente el número de muones dN que se desintegran es proporcional al tiempo dt y al número de muones N que hay

$$dN = -KN\,dt$$

donde K es la constante de proporcionalidad y se ha incluido un signo menos porque el número de muones disminuye con el tiempo. Integrando esta ecuación se tiene

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = \int_0^t -K\,dt \Rightarrow \ln\frac{N}{N_0} = -Kt \Rightarrow N = N_0\,e^{-Kt}$$

En los límites de integración se han puesto el número de muones iniciales N_0 y finales N tras un tiempo t. Como la constante K tiene las dimensiones del inverso de un tiempo, la expresaremos como

$$K = \frac{1}{\tau_0}$$

con τ_0 la denominada vida media. Con esto la ley de desintegración radiactiva queda finalmente

$$N = N_0\,e^{-\frac{t}{\tau_0}}$$

La altura de caida en función del tiempo que recorren los muones que llegan a tierra es

$$h = vt + \frac{gt^2}{2} = \left(v + \frac{gt}{2}\right)t$$

con g la aceleración de la gravedad. Como la velocidad inicial v con que se crean los muones es muy elevada, despreciaremos el término que contiene a la gravedad y ponemos

$$v >> \frac{gt}{2} \Rightarrow h \simeq vt \Rightarrow t \simeq \frac{h}{v} = \frac{9 \cdot 10^3}{0,998 \cdot 2{,}997 \cdot 10^8} = 3,009 \cdot 10^{-5}s$$

Con este tiempo t vamos a calcular cuántos muones llegarían a la superficie terrestre sin desintegrarse al no tener en cuenta la dilatación relativista del tiempo. Para ello tomaremos como vida media la que tienen los muones generados en un acelerador de partículas τ_0, esto es, cuando se los observa a baja velocidad, o lo que es prácticamente lo mismo, desde el sistema de referencia propio S' que se mueve con los muones. Entonces tendríamos

$$N_{(\text{en reposo})} = N_0\,e^{-\frac{t}{\tau_0}} = 10^8 \cdot e^{\frac{-3{,}009 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-6}}} = 29{,}244 \simeq 29$$

o sea que de cada cien millones sólo llegarían unos 29. Ahora bien, si se tiene en cuenta que los muones es observan desde el sistema de referencia ligado a tierra S en movimiento a alta velocidad, la vida media que hay que tener en cuenta realmente es la debida a la dilatación relativista del tiempo, esto es

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0,998^2}} = 3,164 \cdot 10^{-5}s$$

Por tanto la vida media en movimiento es unas 16 veces mayor que en reposo. Con ello el número de muones que llegan realmente a la superficie terrestre es

$$N_{(\text{en movimiento})} = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} = 10^8 \cdot e^{\frac{-3{,}009\cdot 10^{-5}}{3{,}164\cdot 10^{-5}}} = 38,635 \cdot 10^6 \simeq 39 \cdot 10^6$$

es decir que los detectores situados en la superficie terrestre deben contar del orden de un millón de veces más muones que los predichos por la física clásica. Esto se ha comprobado realmente siendo este experimento una sólida prueba de la dilatación del tiempo que predice la teoría de la relatividad.