III - Ecuaciones Básicas

Javier Zorzano
Departamento de Física Aplicada a la Ingeniería Industrial
U.P.M.
Setiembre 2008

1 Introducción. Uso de la mecánica newtoniana como aproximación a la relatividad general

La cosmología trabaja actualmente con ecuaciones provenientes de la relatividad general. Sin embargo no se necesita hacer un curso de relatividad general para comenzar a comprenderla. Los conocimientos básicos que se necesitan para introducir el estudio de la cosmología son los de la física que se enseña en los primeros cursos de carrera.

Lo fundamental son un par de ecuaciones: la ecuación de Friedmann y la ecuación de fluido. La **ecuación de Friedmann** es una consecuencia de las ecuaciones de Einstein de la relatividad general y es precisamente la que gobierna la expansión del Universo. La **ecuación de fluido** se deriva de la primera ley de la termodinámica al calcular el trabajo hecho por la presión cuando se expande el Universo.

La ecuación de Friedmann se va a derivar para un universo newtoniano en el que el movimiento es no relativista y donde la gravedad es debida simplemente a la atracción entre masas. Se aplica, entonces, la conservación de la energía mecánica al movimiento de una galaxia en un universo homogéneo en expansión. La energía conservada será la suma de la energía cinética no relativista más la energía potencial gravitatoria. Y la ecuación de Friedmann será su consecuencia.
Para pasar a las ecuaciones que realmente proporciona la relatividad general (RG) basta usar la equivalencia de masa y energía. Lo que haremos será interpretar la densidad de masa en la ecuación de Friedmann 'newtoniana' como densidad de energía e incluiremos en ella todas las formas de energía. La relatividad general proporciona exactamente la misma ecuación de Friedmann que se ha obtenido por el anterior método. Es cierto que el fundamento en RG es más bien la curvatura del espacio que la energía gravitacional; pero la ecuación resultante es la misma.

La relatividad general sí se necesita para describir cómo la curvatura del espacio puede cambiar el área de la 'esfera' de luz. La relatividad general da la curvatura en función de la densidad de energía. Al cambiar el área de la esfera sobre la que se esparce la luz, cambia la intensidad de la luz sobre ella y en consecuencia cambia la distancia luminosa que luego hay que utilizar para contrastar la ley de Hubble.

2 Principio Cosmológico. Homogeneidad e isotropía.

La cosmología moderna se basa en una importante suposición básica: el Principio Cosmológico, que es una versión más general del Principio Copernicano. El Principio Copernicano dice que la Tierra no es el centro del universo, por tanto que no estamos viviendo en un sitio especial del mismo. Extendido a todo el universo esto significa que el universo debe ser homogéneo.

El **Principio Cosmológico** afirma, pues, que el universo es **homogéneo** e **isótropo**. La homogeneidad significa que el universo tiene las mismas propiedades en todas las regiones, en cualquier punto del universo. La isotropía del universo significa que el universo parece el mismo cuando se le observa en todas las direcciones. Estas dos propiedades están separadas y necesitamos las dos para completar el Principio Cosmológico. Matemáticamente homogeneidad e isotropía son propiedades invariantes frente a las transformaciones de traslación y rotación, respectivamente.

Ni la homogeneidad implica isotropía, ni la isotropía implica homogeneidad. Recuérdese también que una magnitud puede tener un valor uniforme en el espacio y aun siendo constante en el espacio no ser constante en el tiempo; y viceversa. Las dos propiedades son independientes.

Realmente sabemos que a pequeñas escalas el universo ni es homogéneo ni es isótropo, pues si no fuera así no podrían existir las distintas estructuras que conocemos en él, tales como las galaxias, estrellas, planetas y finalmente nosotros mismos, los seres humanos. Sin embargo cuando observamos y promediamos el universo en grandes escalas, tal como se hace en los experimentos que estudian la 'Estructura a Gran Escala' (LSS), el universo aparece homogéneo e isótropo. Por otra parte la radiación cósmica de fondo de microondas (CMB) es fuertemente isotrópica: hasta una parte en 10^5. Esto indica que en los primeros tiempos, cuando se originó la CMB, el Universo era en efecto muy homogéneo.

3 Expansión. Ley de Hubble. Coordenadas comóviles y factor de escala.

La expansión del Universo se comprueba al observar el movimiento de escape, unas de otras, de las galaxias. La suposición fundamental es que el Universo es semejante a un gas en expansión en el que las unidades básicas son las galaxias. Ahora bien, una galaxia individualmente, no se expande; lo que se expande es el espacio. Esta observación experimental está descrita por la **Ley de Hubble**: las velocidades a las que se separan de nosotros las galaxias son proporcionales a su distancia de nosotros. Esto es: una galaxia que esté a una distancia R se aleja de nosotros con una velocidad

$$\frac{dR}{dt} \propto R \ \Rightarrow \dot{R} = H\,R \qquad [3.1]$$

en donde *H,* el parámetro de proporcionalidad, es el llamado parámetro de Hubble o 'constante' de Hubble. La ley de Hubble es, precisamente, la que deberíamos observar en un universo en expansión homogéneo e isotrópico, como ya se ha visto en el tema II.

La expansión del universo nos llevaba al concepto de **expansión del espacio**. El espacio en sí mismo se está expandiendo. Para su mejor manejo necesitamos introducir las llamadas "**coordenadas comóviles**" ***x***. Estas son coordenadas que se mueven, son 'arrastradas', junto con el espacio en su expansión. Las escalas físicas *R* aumentan con la expansión, y las coordenadas comóviles '*x'* se 'mueven' unidas a él.

La distancia física *R* está así dada, en función de las coordenadas comóviles, por

$$R(t) = a(t)\,x \qquad [3.2]$$

donde se ha introducido ***a(t)*** el llamado **factor de escala**.

Introduciendo el factor de escala en la Ley de Hubble:

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{a}}{a} \qquad [3.3]$$

4 Ecuaciones básicas de la Cosmología. (Desde la mecánica newtoniana)

4.1 Gravedad newtoniana. Conservación de la energía.

El observador, desde el que se miden las distancias, está situado en una galaxia típica. En principio, en virtud de la homogeneidad, ese observador puede estar en cualquier lugar de este universo. En un universo newtoniano la gravedad atrae a las galaxias unas contra otras y por tanto frena la expansión del Universo. La fuerza de la gravedad que actúa sobre otra galaxia, situada a distancia R de la primera, proviene de la masa del universo homogéneo interior a una esfera de radio *R.* Es una consecuencia bien conocida de la mecánica clásica y la teoría de campos. Esa fuerza es precisamente la misma que si toda la masa estuviera concentrada en el centro de la esfera; la fuerza total de la gravedad que proviene de las capas esféricas exteriores a esa esfera, en un universo homogéneo es, como ya se sabe, nula.

La fuerza que se ejerce será según la mecánica newtoniana

$$\vec{F} = \frac{GM}{r^2} m \vec{u}_r \qquad [4.1]$$

donde $\vec{F}$, *M*, *m*, *G* designan como siempre la fuerza, masa, masa de prueba y la constante gravitatoria; mientras que *r* es la distancia entre las dos masas y $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección de *M* a *m*. La fuerza siempre es atractiva y $\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r$ es la aceleración gravitatoria $\vec{g}$.

La **energía potencial** de una masa m en el borde de la esfera está dada por

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \qquad [4.2]$$

Y el potencial gravitatorio en ese punto es:

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \qquad [4.3]$$

En el modelo utilizado por Milne and McCrea la esfera de masa se está expandiendo con velocidad $v = \dot{R}(t)$.

La masa esférica se mantiene durante la expansión homogénea e isotrópica, vista desde el centro de la esfera. Es fácil comprobar que si la densidad de masa ρ es homogénea en un tiempo *t* también lo será en *t'*. En efecto, supuesta la homogeneidad, en *t*, para dos distancias R_1 y R_2 distintas, las masas esféricas interiores serán respectivamente: $\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho$ y $\frac{4}{3}\pi R_2^3 \rho$. Y en *t'*, tras haber aumentado las distancias físicas *R,* las masas podrían ser $\frac{4}{3}\pi R_1'^3 \rho_1'$ y $\frac{4}{3}\pi R_2'^3 \rho_2'$. Ahora bien, descontadas las pequeñas velocidades peculiares de las galaxias, ninguna masa 'entra o sale', cruza durante la expansión la superficie esférica que se expande. Con lo que utilizando coordenadas comóviles x_1 y x_2:

$$\tfrac{4}{3}\pi R_1^3\,\rho = \tfrac{4}{3}\pi a^3 x_1^3 \rho = \tfrac{4}{3}\pi R_1^3\,\rho_1' = \tfrac{4}{3}\pi a'^3 x_1^3\,\rho_1' \Rightarrow a^3\rho = a'^3\rho_1'$$
$$\tfrac{4}{3}\pi R_2^3\,\rho = \tfrac{4}{3}\pi a^3 x_2^3 \rho = \tfrac{4}{3}\pi R_2'^3\,\rho_2' = \tfrac{4}{3}\pi a'^3 x_2^3\,\rho_2' \Rightarrow a^3\rho = a'^3\rho_2'$$

Con lo que si ρ era homogénea en t, se cumple que $\rho'_1 = \rho'_2$ y será homogénea en t'.

Veamos ahora la aplicación de la **ley de conservación de la energía** para una partícula de masa m en la superficie de esta esfera. La masa total de la esfera es ρV donde ρ es la densidad de masa y V el volumen $V = 4/3\ \pi\ R^3$. La energía total de esta partícula es entonces

$$E_P = -\frac{GM\,m}{R} = -\frac{G\tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho\, m}{R} = -\frac{4}{3}G\pi R^2 m$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 + E_p = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - \frac{4}{3}G\rho\pi R^2 m \qquad [4.4]$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $2/(mR^2)$ queda

$$\frac{2E}{mR^2} = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho \qquad [4.5]$$

Esta ecuación es pues otra forma de la ley de conservación de la energía.

4.2 La ecuación de Friedmann

Ahora incluimos la expansión, descrita por la **Ley de Hubble**, en la expresión de la conservación de la energía. Sustituyendo

$$H \equiv \frac{dR/dt}{R} = \frac{\dot{R}}{R} \qquad [4.6]$$

en la anterior ecuación de conservación de la energía, obtenemos:

$$\frac{2E}{mR^2} = H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho \qquad [4.7]$$

En un momento dado t_1, en nuestro Universo homogéneo, H y ρ son contantes en todo el espacio. Esto significa que el cociente $2E/mR^2$ es el mismo para todas las galaxias. Ese cociente, dependiendo del valor de E, será negativo, cero o positivo, pero será el mismo para todas las galaxias.

Introduzcamos ahora en esta última ecuación las **coordenadas comóviles** de la expansión, $R(t) = a(t)\,x$,

$$\frac{2E/m x^2}{a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho = H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho \qquad [4.8]$$

Nótese que la fracción $2E/mx^2$ también es una constante en el tiempo. Cuando el espacio se expande, el valor de x para una galaxia se mantiene el mismo, puesto que x es *comóvil* con el espacio y su energía total E también se mantiene constante.

Definimos ahora $k \equiv \frac{-2E}{mx^2}\cdot\frac{1}{c^2}$ donde c es la velocidad de la luz. Si E no es nulo, podríamos elegir las unidades de forma que el valor absoluto $\left|\frac{-2E}{mx^2}\cdot\frac{1}{c^2}\right| = 1$. Esa **constante *k*** será 1,0 ó -1 según que E sea negativo, cero o positivo.

Con ello la ecuación anterior se convierte en

$$\boxed{\frac{(dR/dt)^2}{R^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{kc^2}{a^2}} \qquad [4.9]$$

Ahora es cuando debemos invocar a la teoría de la **Relatividad**. En base a ella, la masa y la energía son equivalentes: $E = mc^2$. Hacemos por tanto que ρ sea la densidad de materia y energía del universo. Y suponemos, como en **Relatividad General**, que la propia energía genera gravedad. Con ρ como densidad de energía, ésta es precisamente la misma **ecuación de Friedmann** que se obtiene de la relatividad general. La diferencia estriba fundamentalmente en que en RG, la **constante *k*,** que también es 1, 0 ó -1, indica si la curvatura del espacio es positiva, nula o negativa. Naturalmente, la relatividad general proporciona una derivación más perfecta y satisfactoria de la ecuación de Friedmann. Pero hemos visto que, con los supuestos inidcados, la física newtoniana se acerca notablemente. La ecuación que proporciona es exactamente la ecuación de Friedmann. Y puede ser correctamente utilizada cuando se hace la reinterpretación adecuada de sus términos.

4.2.1 La constante cosmológica Λ en la ecuación de Friedmann

Einstein comprobó pronto que este universo, así descrito, no era un universo estático como él deseaba. Para lograr un universo en equilibrio estático añadió a sus ecuaciones una constante: la constante cosmológica Λ.

Añadir $\Lambda / 3$ en las ecuaciones anteriores equivale simplemente a añadir una cantidad constante a la energía del universo. Por cierto, que la energía del vacío hace el mismo efecto que Λ en las ecuaciones de Einstein. Incluyendo, por tanto, en [4.4] un término con la constante cosmológica no se viola la conservación de la energía y se obtiene:

$$\frac{1}{2}m\dot{R}^2 + E_p = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - \frac{4}{3}G\rho\pi R^2 m = E + \frac{mR^2}{2}\frac{\Lambda}{3} \qquad [4.10]$$

La ecuación de Friedmann se convierte entonces en

$$\boxed{H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}} \qquad [4.11]$$

Esta es la **ecuación de Friedmann con constante cosmológica** Λ. De acuerdo con el Principio Cosmológico esta ecuación que aquí aparece puede ser aplicada a cualquier región del universo y es fundamental en cosmología. Expresa la evolución del factor de escala a, en relación con la densidad total ρ de materia y energía, la geometría k y la constante cosmológica Λ del universo.

4.3 Ecuación de Fluido

El modelo que se toma para la materia y la radiación del universo es el de un fluido perfecto. Descrito en coordenadas comóviles este fluido no presenta ni viscosidad ni conducción de calor.

Aplicamos la primera ley de la termodinámica

$$dU = TdS - dW = TdS - pdV \qquad [4.12]$$

donde S, T, W, p son respectivamente entropía, temperatura, trabajo hecho y presión. Esta ley, como es bien sabido, es también una ley de conservación de la energía. Y lo que afirma es que el aumento de energía interna corresponde al calor dQ absorbido por el sistema, menos el trabajo dW realizado por el mismo.

Ahora bien, dS se hace cero, puesto que se supone que la expansión es reversible y adiabática. A su vez, en el modelo expuesto, dV es:

$$dV = d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2\, dR\,.$$

De esta forma el lado derecho de la ecuación [4.12] queda:

$$dU = -p\, d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = -p\, 4\pi R^2\, dR \qquad [4.13]$$

Por otra parte la energía relativista total de las partículas en una esfera es

$$U = Mc^2 = \rho V c^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c^2$$

Con lo que diferenciando da:

$$dU = d\left(\rho \frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2 \rho c^2\, dR + \frac{4}{3}\pi R^3 c^2 d\rho \qquad [4.14]$$

Dividiendo en las ecuaciones anteriores dU por dt y combinándolas, obtenemos

$$-p\, 4\pi R^2\, \dot{R} = 4\pi R^2 \rho c^2\, \dot{R} + \frac{4}{3}\pi R^3 c^2 \dot{\rho} \qquad [4.15]$$

Reordenando y simplificando los términos en esta ecuación,

$$-p\, \dot{R} = \rho c^2\, \dot{R} + \frac{1}{3} R c^2 \dot{\rho} \;\Rightarrow\; -3\frac{p}{c^2}\frac{\dot{R}}{R} = 3\rho\frac{\dot{R}}{R} + \dot{\rho}$$

Y poniendo R y dR/dt en función del factor de escala $a(t)$ [3.3], obtenemos finalmente **la ecuación de fluido**

$$\boxed{\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)=0} \qquad [4.16]$$

Recordemos que tanto la ecuación de fluido como la ecuación de Friedmann son, en efecto, leyes de conservación de la energía.

4.3.1 La ecuación de estado

La presión depende de la naturaleza de la energía. Suponemos que la ecuación de estado es de la forma

$$p = p\,(\rho) \qquad [4.17]$$

Es decir que p es una función explícita de ρ solamente; suponemos que no hay otras fuerzas externas. La densidad de energía ρ puede estar proporcionada por la materia, por la radiación, por el vacío o por una combinación de ellas.
Como se ha visto en la expresión [4.12] de la primera ley de la termodinámica, el trabajo hecho por cada constituyente hace disminuir la energía de este constituyente conforme el universo se expande. Igualando las expresiones [4.13] y [4.14] obtenidas para dU:

$$d\left(\rho\frac{4}{3}\pi R^3\right)=-p\,d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

Como la igualdad se mantiene para cada constituyente:

$$\frac{d}{dt}\rho_i R^3 c^2=-p_i\frac{d}{dt}R^3 \qquad [4.18]$$

en donde el subñindice i puede adquirir la notación: m para la materia, γ para la radiación ó v para el vacío.

La densidad de energía de la **materia**, no relativista, no produce presión que afecte a la expansión del universo. Las galaxias no colisionan normalmente y por tanto no crean presión como lo hacen las moléculas de un gas. Así que

$$p_m = 0$$

Inicialmente en el universo la densidad de energía estaba proporcionada principalmente por la radiación. La densidad y la presión de la **radiación** están relacionadas por la expresión (se recuerda la deducción en el Apéndice A):

$$p_\gamma=\rho_\gamma\frac{c^2}{3}$$

Por su parte la densidad del **vacío** se mantiene constante, no cambia con el tiempo:

$$\frac{d}{dt}\rho_v = 0$$

A primera vista, de forma superficial, nos puede parecer evidente que la densidad del vacío no cambia con el tiempo, ya que no hay nada que cambiar. Pero para entenderlo un poco más profundamente recordemos que bajo una transformación Lorentz relativista, el vacío se supone invariante. Por otra parte, en un universo homogéneo la densidad de energía es constante a través del espacio, así que su gradiente es cero. Como las transformaciones de Lorentz mezclan las derivadas espaciales con derivadas temporales, para que se mantenga la invariancia Lorentz la derivada temporal de la densidad de energía debe ser también cero.

Aplicando [4.18] al vacío y dado que $\frac{d}{dt}\rho_v = 0$:

$$\frac{d}{dt}\rho_v R^3 c^2 = +\rho_v c^2 \frac{d}{dt} R^3 = -p_v \frac{d}{dt} R^3$$

Con lo que para el vacío:

$$p_v = -\rho_v c^2$$

Esto podría verse también considerando el tensor energía-momento. Este tensor contiene tanto la densidad de energía ρ como la presión p y la exigencia de que se mantenga invariante bajo una transformación Lorentz obliga a que su relación sea precisamente la ecuación $p_v = -\rho_v c^2$ mostrada. (Verlo en Apéndice B).

La energía del vacío y su presión tienen el mismo efecto que la constante cosmológica que introdujo Einstein en las ecuaciones de la relatividad general. Einstein utilizó el símbolo Λ para designar esta última y se suele utilizar también el subíndice Λ para designar la energía y la presión del vacío: ρ_Λ y p_Λ

En general tanto para Λ como para la energía oscura, en los modelos llamados de 'quintaesencia', es $p < 0$. Esto es la presión es negativa. Bajo el nombre 'quintaesencia' se cubren una gran variedad de hipótesis sobre el contenido del universo con una relación negativa entre presión p y densidad de energía ρ. Y esta relación puede ser tanto constante en el tiempo como dependiente de él..

4.3.2 La ecuación de fluído con el parámetro ω

Según la discusión anterior, la ecuación de estado [4.17] puede ponerse de forma general:

$$\boxed{p = \rho c^2 \omega} \qquad [4.19]$$

donde $\omega = 0$ para la materia , $\omega = 1/3$ para la radiación y $\omega = -1$ para el vacío (Λ), mientras que $\omega < -1/3$ para la energía oscura en general. La ecuación de fluido [4.16] queda entonces expresada como

$$\boxed{\dot{\rho} + 3H\rho(1+\omega) = 0} \qquad [4.20]$$

4.4 Ecuación de aceleración

La ecuación de la aceleración nos dice cómo cambia la tasa de expansión del universo, esto es cómo se frena o cómo se acelera. Se obtiene mezclando la ecuación de Friedmann con la ecuación de fluido. Recordemos que ambas son realmente ecuaciones de conservación de la energía mecánica y termodinámica respectivamente.

Derivemos la ecuación de Friedmann [4.11] con respecto al tiempo:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\ddot{a}\,a - \dot{a}\,\dot{a}}{a^2} = 2\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2\right) = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} - kc^2\frac{2\dot{a}}{a^3} + 0$$

Y ahora introducimos la ecuación de fluido [4.20] para sustituir la $\dot{\rho}$ y simplificamos:

$$2\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2\right) = -\frac{8\pi G}{3}3H\,\rho(1+\omega) - \frac{2kc^2}{a^2}\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2\right) = -4\pi G\rho(1+\omega) - \frac{kc^2}{a^2}$$

Finalmente, volviendo a usar la ecuación de Friedmann, se sustituyen H^2 y kc^2/a^2 con lo que se obtiene la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho(1+\omega) + H^2 - \frac{kc^2}{a^2} = -4\pi G\rho(1+\omega) + \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} =$$

$$= -\frac{12\pi G\rho}{3}(1+\omega) + \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi G\rho}{3} - \frac{4\pi G\rho}{3}(3\omega) + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1+3\omega) + \frac{\Lambda}{3}} \qquad [4.21]$$

Como se ve, la ecuación de aceleración no contiene k; por tanto puede usarse sin tener en cuenta la geometría del universo.

A primera vista, de la ecuación parece deducirse que el universo se está desacelerando. Pero cuando el universo esté dominado por un fluido con $\omega < -1/3$, esto es por la energía oscura, con $p < -\rho/3$, podría hacerse $\ddot{a}$ positiva y el universo se aceleraría. La reciente observación de supernovas Tipo Ia apoya firmemente la idea de que **el universo actualmente se está acelerando**. Desde el punto de vista de la física de altas energías podría existir energía oscura en la forma de un campo escalar que proporcionaría una presión negativa y que por tanto aceleraría la expansión del universo. Estos campos escalares son llamados de forma general **Quintaesencia**, el nombre del quinto elemento en la antigua Grecia.

5 Soluciones sencillas

5.1 Solución de la ecuación de fluido

Para simplificar las expresiones trabajaremos en adelante con unidades en las que $c \equiv 1$. La ecuación de estado del fluido perfecto cosmológico es entonces $p = \omega\,\rho$. La ecuación de fluido [4.20] puede transformarse así

$$\dot{\rho} + 3(1+\omega)\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 = \dot{\rho} + 3(1+\omega)\frac{\dot{a}\,a^{3(1+\omega)-1}}{a^{3(1+\omega)}}\rho \Rightarrow \dot{\rho}\,a^{3(1+\omega)} + 3(1+\omega)\,a^{3(1+\omega)-1}\,\dot{a}\,\rho = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\,a^{3(1+\omega)}\right) = 0 \qquad [5.1]$$

Está claro que $\rho\, a^{3(1+\omega)}$ es constante; por tanto obtenemos

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \qquad [5.2]$$

También puede obtenerse integrando la ecuación de fluido [4.20], suponiendo que ω tiene un valor constante. Se trata de una ecuación diferencial separable

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1+\omega)$$

$$\int \frac{1}{\rho} d\rho = -3(1+\omega)\int \frac{1}{a} da$$

$$\ln \rho = -3(1+\omega)\ln a + C \qquad \Rightarrow \qquad \rho = e^{C} a^{-3(1+\omega)}$$

Poniendo $e^{C} = \rho_0 a_0^{3(1+\omega)}$, donde el subíndice 0 indica como siempre el valor en el momento actual, queda:

$$\boxed{\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)}} \qquad [5.3]$$

5.2 Solución de la ecuación de Friedmann

Hay una solución exacta de la ecuación de Friedmann, fácil de encontrar, **cuando se supone que el universo es plano y que *Λ* tiene un valor despreciable**. La teoría de la inflación del universo predice ya que el universo tiene geometría plana (k = 0). Los datos que proporcionan, la llamada 'cosmología de precisión', los detectores de la radiación del fondo cósmico de microondas CMB, del Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) por ejemplo, confirman que, efectivamente, el universo es muy aproximadamente plano. Y por otra parte Λ tiene realmente un valor muy pequeño, asombrosamente pequeño.

Introduciendo la anterior solución de la ecuación de fluido [5.3], en la ecuación de Friedmann [4.11] así simplificada, con $k = \Lambda = 0$, queda:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)} \qquad [5.4]$$

La solución de esta ecuación es:

$$\boxed{a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}} \qquad [5.5]$$

donde a_0 y t_0 corresponden a un tiempo arbitrario.

Conforme el universo evoluciona, hay un componente particular, radiación, materia etc., que durante algún período de tiempo domina en el universo más que los demás. De acuerdo entonces con el valor de ω que le corresponda a esa componente dominante, al introducirlo en la ecuación [5.5], la dominación de cada tipo de fluido conducirá a un tipo distinto de expansión cinemática. Por ejemplo en un universo con $\omega < -1/3$, domina como fluido la energía oscura. Se ve entonces en la ecuación [5.5] que la expansión del universo se estaría acelerando, lo cual está de acuerdo con lo que predecia la ecuación de aceleración [4.21].

5.3 Evolución de la densidad con el tiempo

Uniendo las soluciones [5.3] de la ecuación de fluido y de la ecuación de Friedmann [5.5] obtenemos

$$\boxed{\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2}} \qquad [5.6]$$

en donde se puede comprobar que no aparece el valor de ω, esto es el tipo de fluido.

5.4 Evolución del parámetro de Hubble con el tiempo

Derivando la ecuación [5.5] con respecto al tiempo y dividiendo nuevamente el resultado por a, se encuentra la expresión de cómo evoluciona el parámetro de Hubble con el tiempo

$$\boxed{H(t) = \left(\frac{2}{3(1+\omega)} \right) \frac{1}{t}} \qquad [5.7]$$

Al valor del parámetro de Hubble en el momento presente se le llama constante de Hubble H_0, y suele expresarse en términos de una **constante adimensional *h*** como $H_0 = 100h$ km/s/Mpc. Esto significa que la expansión aumenta 100 h km/s por cada aumento de 1 Mpc en la distancia. (1 pc = 3,261 años luz= $3{,}086 \times 10^{16}$ m.) El valor de la constante h está entre 0,55 y 0,75. Los datos del WMAP (Febrero 2003) indican que $h = 0{,}71{+}0{,}04{-}0{,}03$.

6 Modelos simples

6.1 El universo compuesto de materia

La materia, y se entiende como tal a las partículas no relativistas, tiene presión nula ($p_m = 0$ ó $w_m = 0$). Así que en un universo dominado por la materia, las soluciones [5.3] para la densidad de energía y [5.5] para el factor de escala se convierten en:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3} \qquad [6.1]$$

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \qquad [6.2]$$

Estas ecuaciones nos dicen cómo, conforme aumenta el volumen del universo en la expansión, decrece la densidad y como va aumentando el factor de escala con el tiempo.

En el universo dominado por la materia, H evoluciona, de acuerdo con [5.7], como

$$H(t) = \frac{2}{3t} \qquad [6.3]$$

Cuando $t \to \infty \Rightarrow H = 0 \Rightarrow da/dt = 0,\ dR/dt = 0$ y el universo se detendrá en su expansión.

Podemos obtener un **orden de magnitud de la edad del universo**. Utilizando $h = 0{,}71$ para la constante adimensional de Hubble, el valor actual del parámetro de Hubble sería $H_0 = 2{,}30 \times 10^{-18}\ s^{-1}$. La materia ha estado dominando el universo mucho más tiempo que cualquier otro tipo de fluido, supongamos que siempre hubiera dominado la materia en el universo. Al comenzar la expansión $t = 0$ s, así que la edad de un universo dominado por la materia sería actualmente $t_0 = 2/3\ H_0 = 2{,}90 \times 10^{17}$ s, esto es del orden de $9{,}20 \times 10^{9}$ años. Este es un valor aproximado, inferior, de la edad de nuestro universo.

6.2 El universo compuesto de radiación

Para la radiación, y partículas relativistas, se cumple, según hemos visto, la ecuación de estado de fluido $p_\gamma = \rho_\gamma/3$ ó sea $\omega_\gamma = 1/3$. Aplicando el mismo procedimiento que el que se ha hecho para el caso de la materia, las soluciones [5.3] para la densidad de energía y [5.5] para el factor de escala se convierten en:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-4} \qquad [6.4]$$

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \qquad [6.5]$$

Comparando con el caso anterior se ve cómo el universo lleno de radiación se expande más lentamente que el universo lleno de materia. En ambos casos la densidad decrece, efectivamente, con el t^2, según [5.6]. Pero mientras que en el caso de la materia la densidad decrece con a^3, en el caso de la radiación la densidad decrece con a^4.

¿Por qué aparece un f**actor *a* extra?** Es una consecuencia del efecto de corrimiento hacia el rojo (redshift) en la longitud de onda de las partículas relativistas. Veamos la explicación.

Recordando la relación con el factor de escala $R(t) = a(t)\cdot x$ [3.2], podemos escribir que en el caso de la radiación

$$\rho \propto \frac{1}{R^4}$$

Cuando el universo se expande, la longitud de onda λ de la radiación se expande también proporcionalmente al factor de escala $a(t)$ y por lo tanto a R.

$$\lambda \propto R$$

En efecto, a escala extragaláctica, para pequeñas diferencias de distancia dR, la velocidad de recesión difiere en dv. De acuerdo con la ley de Hubble [3.3],

$$dv = d\dot{R} = H\, dR = \frac{\dot{a}}{a} dR$$

H se supone constante dentro de la variación de la pequeña distancia dR.
La expansión, de forma similar a lo que hace el efecto Doppler, aumenta la longitud de onda de la radiación λ en $d\lambda = \lambda_{ob} - \lambda_{emit}$. Y usando la fórmula del efecto Doppler

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{emit}} = \frac{dv}{c}$$

El tiempo que tarda la luz en atravesar la distancia dR es $dt = dR/c$. Uniendo las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{emit}} = \frac{(\dot{a}/a)\, dR}{c} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} dt = \frac{da}{a} \qquad [6.6]$$

Podemos ver que $\lambda \propto a$ y por tanto que $\lambda \propto R$

Por otra parte, como es bien sabido, las longitudes de onda λ y las frecuencias ν de la radiación se relacionan por $\nu\lambda = c$. Y la energía de un fotón es $E = h\nu$. En consecuencia

$$E \propto \nu \propto \frac{1}{R}$$

La energía media de un fotón cuando la radiación está en equilibrio a temperatura T es

$$< E > \approx 2{,}7\, k\, T$$

$$T \propto < E > \propto \frac{1}{R}$$

En todas estas fórmulas h y k son las constantes de Planck y de Boltzmann, dos constantes universales y suponemos que no cambian en el tiempo.

En resumen, las longitudes de onda, las frecuencias, las energías y temperaturas de los fotones cuando el universo se expande, cambian con R según:

$$\lambda \propto R \qquad\qquad E \propto \nu \propto \frac{1}{R} \qquad\qquad T \propto < E > \propto \frac{1}{R}$$

Aunque el universo se expande, el número de fotones no cambia; así que el número de fotones por unidad de volumen decrece con el volumen $n_\gamma \propto \frac{1}{R^3}$

Por tanto la energía de la radiación por unidad de volumen es

$$\rho_\gamma = n_\gamma < E > \propto \frac{1}{R^3}\frac{1}{R} \qquad [6.7]$$

Esto explica la dependencia con R^{-4} señalada.

Finalmente la expresión [5.7] del parámetro de Hubble da que en un universo dominado por la radiación:

$$H(t) = \frac{1}{t} \qquad [6.8]$$

6.3 El universo compuesto de materia y radiación

En el universo formado por materia y radiación tenemos contribuciones de ambos tipos de fluidos. La ecuación de Friedmann [4.9] es ahora

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{mat} + \rho_{rad}\right) \quad [6.9]$$

en donde ρ_{mat} y ρ_{rad} están dados por [6.1] y [6.4] respectivamente.

No es sencillo obtener la solución exacta para esta mezcla de materia y radiación, pero se puede estudiar cualitativamente su evolución.

En el universo conteniendo estos dos componentes, la materia decrece más lentamente que la radiación. En los primeros tiempos, tras el Big Bang, la radiación debió haber dominado el universo, y podemos usar de forma aproximada las soluciones del caso del universo lleno de radiación. Llegará un momento después del comienzo del universo en que ρ_{rad} haya descendido tanto que $\rho_{rad} = \rho_{mat}$. A ese tiempo se le llama el de la **igualdad de materia y radiación**.

Después de este tiempo, la materia comenzó a dominar el universo y podemos usar, también de forma aproximada, las soluciones del caso de universo lleno de materia. Comparando las ecuaciones [6.2] y [6.5] se comprueba que cuando la materia se hace dominante la expansión se hace más rápida; el factor de escala *a* se incrementa más rápidamente que en el caso de la radiación. Y ya desde entonces, tanto la densidad de materia como la densidad de radiación decrecen, debido a esa evolución del factor de escala, más rápidamente que antes.

Habíamos visto que para la radiación:

$$T \propto \langle E \rangle \propto \frac{1}{R} \propto \frac{1}{a}$$

Como la evolución del factor de escala *a* con el tiempo es según [5.5]:

$$a = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$$

Se sigue que la evolución de la temperatura con el tiempo es

$$T \propto \frac{1}{t^{2/[3(1+\varpi)]}} \qquad [6.10]$$

La interpretación inmediata de las dos ecuaciones anteriores es que el universo al comienzo debío ser muy pequeño y muy caliente. Este es el origen del concepto del Big Bang.

6.4 La expansión para el caso del vacío.

En este caso, al ser ρ_v constante, la ecuación de Friedmann [4.11], queda:

$$H^2 = \left(\frac{dR/dt}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_v = cte \quad \Rightarrow \quad \frac{dR}{dt} \propto R \;\Rightarrow R \propto e^{Ht} \quad [6.11]$$

Eso significa que la expansión es exponencial y con *H* constante. Esto es equivalente a una ‘inflación’.

7 Densidad crítica. Parámetros de densidad y geometría del Universo.

La ecuación de Friedmann [4.11] podemos transformarla y escribirla de otra forma.

Λ representa la ya mencionada constante cosmológica Λ u otra forma de energía oscura (dark energy) en el universo. Definimos su densidad de energía ρ_Λ como

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G} \qquad [7.1]$$

Llamamos ρ_{tot} a la densidad de energía total del universo,

$$\rho_{tot} = \rho_{rad} + \rho_{mat} + \rho_\Lambda \qquad [7.2]$$

Ahora en [4.11], con $c \equiv 1$:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda = \frac{8\pi G}{3}\rho_{tot} - \frac{k}{a^2}$$

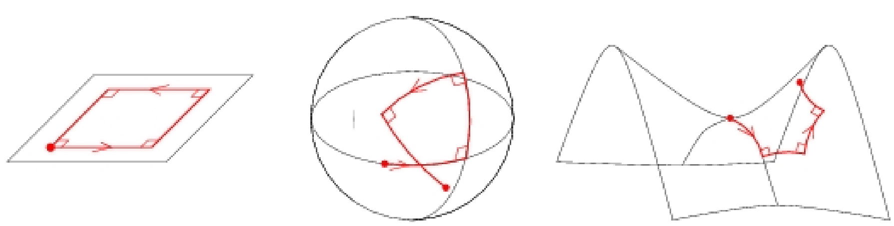
$$-k = a^2 H^2 - a^2 \frac{8\pi G}{3}\rho_{tot}$$

$$k = a^2 H^2 \left[\frac{8\pi G}{3H^2}\rho_{tot} - 1\right] \qquad [7.3]$$

De acuerdo con esta ecuación, el universo puede ser plano ($k = 0$) solamente si

$$\rho_{tot} = \frac{3H^2}{8\pi G} \equiv \rho_c \qquad [7.4]$$

Ésta, así definida, es la **densidad crítica de energía** ρ_c : esto es, la densidad de energía que es consistente con un universo plano.
Si $\rho_{tot} > \rho_c$, entonces $k > 0$ y el universo tiene una geometría cerrada. La expansión del universo podría detenerse en algún momento y entonces comenzaría a recolapsarse.
Por el contario si $\rho_{tot} < \rho_c$ entonces $k < 0$ y el universo tendría una geometría abierta. Esto significaría que el universo se expandirá para siempre y en un futuro lejano, la materia y la radiación estarán muy diluídas. Con el tiempo, la energía del vacío dominará el universo y la expansión entrará en fase de aceleración.
Para una geometría cerrada la suma de ángulos de un triángulo es menor que 180 grados, para una geometría abierta es mayor que 180 grados y para una geometría plana es igual a 180 grados.



La ecuación de Friedmann puede ser expresada también en términos del **parámetro de densidad total *Ω_{tot}***

$$\Omega_{tot} \equiv \rho_{tot} / \rho_c = \frac{8\pi G \rho_{tot}}{3H^2} \qquad [7.5]$$

Sustituyendo en [7.3]

$$1 - \Omega_{tot} = -\frac{k}{a^2 H^2} \qquad [7.6]$$

También pueden expresarse de forma similar parámetros de densidad para la radiación, la materia y el vacío:

$$\Omega_{rad} = \frac{\rho_{rad}}{\rho_{tot}} \Omega_{tot} \qquad \rho_{tot} = \rho_{rad} + \rho_{mat} + \rho_{\Lambda}$$

$$\Omega_{mat} = \frac{\rho_{mat}}{\rho_{tot}} \Omega_{tot} \qquad \Omega_{tot} = \Omega_{rad} + \Omega_{mat} + \Omega_{\Lambda} \qquad [7.7]$$

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_{tot}} \Omega_{tot}$$

En la ecuación [7.6] podemos ver que Ω_{tot} determina, según lo anterior, la curvatura espacial del universo:

$$\begin{aligned} \Omega_{tot} &= 1 \quad \Rightarrow k = 0 \\ \Omega_{tot} &< 1 \quad \Rightarrow k = -1 \qquad [7.8] \\ \Omega_{tot} &> 1 \quad \Rightarrow k = 1 \end{aligned}$$

En el año 2000, dos misiones para la detección de la CMB, BOOMERANG y MAXIMA confirmaron ya que la geometría del universo debería ser muy cercana a la **geometría plana**. Los resultados del satélite WMAP – 5 publicados en 2008 concuerdan también con ese valor.

7.1 El problema del Universo plano y la Inflación.

La ecuación de Friedmann [7.6], podemos escribirla con ayuda de la definición [7.5] del parámetro de densidad total Ω_{tot} como:

$$\frac{\Omega_{tot} - 1}{\Omega_{tot}} = \frac{\rho_{tot} - 3H^2 / 8\pi G}{\rho_{tot}} = \frac{3k\,R(t_1)^2}{8\pi G \rho R^2} \qquad [7.9]$$

Nótese que, de acuerdo con [3.3], el factor de escala a es igual a la relación entre las distancias físicas en dos tiempos diferentes para una misma coordenada comóvil.

El lado izquierdo de la ecuación anterior representa la fracción de densidad de energía que difiere de la densidad crítica. Como se ha dicho, de las observaciones actuales se sabe que en nuestro universo esa fracción es actualmente muy pequeña. En el lado derecho de la ecuación se observa que esta fracción cambia como función de R^{-2} y de ρ cuando el universo se expande. Cuando, al principio, la mayor parte de la energía provenía fundamentalmente de la radiación, usando ρ_{rad} según [6.4] que disminuye con R^{-4}, la fracción [7.9] aumenta en proporción a R^2. O sea, que creció muy rápidamente al expandirse el universo. Puesto que ahora esa fracción es muy pequeña eso significa que debió haber sido extraordinariamente pequeña en los primerísimos tiempos. Y eso exige una explicación.

La explicación que se da en la actual cosmología estándar es que en esos primerísimos tiempos hubo un período de **expansión inflacionaria**, en el que la energía provenía principalmente de la energía del vacío. Como ya se ha visto, en esas condiciones la densidad de energía permanece constante; así que la fracción [7.9] decrece en proporción a $1/R^2$. Pero según [6.11] el universo crece en esas circunstancias de forma exponencial. Por tanto eso explica la pequeñísima diferencia en el universo actual entre la densidad de energía y la densidad de energía crítica. Y consecuentemente el **carácter plano del universo**.

8 Destino del Universo

8.1 La curvatura espacial y el destino del universo

La curvatura espacial k puede jugar un papel importante en la evolución del universo.

Ya hemos visto en detalle el caso $k = 0$. En el caso en que $k \neq 0$, el término k/a^2 dominaría rápidamente en la ecuación de Friedmann [4.11], puesto que decrece mucho más despacio que ρ_{mat} y que ρ_{rad}.

Para $k < 0$, después de que k/a^2 se hace dominante la ecuación de Friedmann queda

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} \qquad [8.1]$$

La solución de esta ecuación es

$$a \propto t \qquad [8.2]$$

que hace que el universo se expanda para siempre.

Para $k > 0$, la expansión se detendrá, porque $-\,k/a^2$ reduce la tasa de evolución del parámetro de Hubble. Ahora ya no se puede despreciar ρ puesto que si se hace daría que $H^2 < 0$. Llegará un momento en que el término de curvatura se equilibrará con el término de materia

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{k}{a^2} \qquad [8.3]$$

y de este modo la expansión se detiene

$$H = 0 \qquad [8.4]$$

A continuación, el término de curvatura espacial empieza a ser dominante y el universo empieza a colapsarse. Notar que si se sustituye $-t$ por t, la ecuación de Friedmann permanece inalterada. Esto significa que el tiempo es reversible en la ecuación y que el universo evoluciona de forma reversible hasta donde comenzó a expandirse.

Apéndice A. Presión de la radiación

Este cálculo es conocido de los cursos de termodinámica. Los fotones, que llevan una cantidad de movimiento p ejercen presión sobre una pequeña área plana A al chocar y reflejarse sobre ella. Sea p_x la componente de p perpendicular a A de un fotón que se aproxima a A. La reflexión cambia p_x a $-p_x$ y deja las otras componentes de p inalteradas. La fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo. Por tanto la fuerza sobre A es $2\, dp_x/dt$ por cada fotón que choca contra A.
Si llamamos n_γ al número de fotones por unidad de volumen y v_x a la componente x de la velocidad de un fotón con cantidad de movimiento p, el número de fotones que chocan sobre A en un tiempo dt es: $n_\gamma\, A\, v_x\, dt$. Ahora bien, solamente los fotones con p_x positivo ejercen fuerza sobre A por lo que hay que dividir ese valor por 2: $\tfrac{1}{2} n_\gamma\, A\, v_x\, dt$.
En conjunto, incluyendo todos los fotones con diferentes valores de cantidad de movimiento p, la fuerza sobre A es

$$\frac{1}{2} 2 \langle p_x v_x \rangle A n_\gamma$$

La velocidad de un fotón es c en la dirección de su cantidad de movimiento p. Suponemos que hay una distribución uniforme de la cantidad de movimiento p en todas las direcciones. Entonces la presión p_γ es:

$$p_\gamma = \langle p_x v_x \rangle n_\gamma = \langle p_x (p_x / |\vec{p}|) \rangle c\, n_\gamma = c \frac{1}{3} \frac{\langle p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \rangle}{|\vec{p}|} n_\gamma$$

Ahora bien, la media no depende de la dirección de la cantidad de movimiento, por tanto

$$p_\gamma = \frac{1}{3} c \langle |\vec{p}| \rangle n_\gamma$$

Y la energía del fotón es: $\quad h\nu = c\dfrac{h}{\lambda} = c|\vec{p}| \quad$ [A.1]

Con lo que finalmente:

$$p_\gamma = \frac{1}{3} c \langle |\vec{p}| \rangle n_\gamma = \frac{1}{3} h\nu\, n_\gamma = \frac{1}{3} \varepsilon\, n_\gamma = \frac{1}{3} \rho_\gamma \quad \text{[A.2]}$$

.

Apéndice B. Presión del vacío

La densidad de energía es la componente tiempo-tiempo T_{00} del tensor relativista $T_{\mu\nu}$. El tensor relativista $T_{\mu\nu}$ debe obedecer a la transformación de Lorentz.

Una transformación de Lorentz cambia $T_{\mu\nu}$ a

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\mu\alpha}\,\Lambda_{\upsilon\beta} T_{\alpha\beta} \qquad [B.1]$$

donde $\Lambda_{\mu\nu}$ es la matriz 4×4 para la transformación de Lorentz de las coordenadas espacio-temporales. Por ejemplo, para un observador moviéndose con velocidad $-v$ en la dirección z la matriz de transformación es

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \qquad [B.2]$$

Veamos su aplicación comparándola con situaciones conocidas en los primeros cursos.

La **carga eléctrica** es un invariante Lorentz, pero la densidad de carga no lo es. Si un observador ve la carga eléctrica en reposo ocupando un volumen V con **densidad de carga** ρ_e, otro observador que contemple esa misma carga moviéndose con velocidad v verá la misma carga total $\rho_e\, V$ que sí es invariante, pero esta vez ocupando un volumen distinto $V\sqrt{1-v^2}$ y por tanto con una densidad de carga distinta: $\rho_e / \sqrt{1-v^2}$.

Pues bien, la densidad de carga forma parte de la componente temporal j_0 de un cuadrivector relativista

$$j_\mu = \left(\frac{\rho_e}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\rho_e \vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right)$$

La parte espacial j de este cuadrivector es la carga por unidad de volumen multiplicada por la velocidad. Esta es la **densidad de corriente**: carga que cruza por unidad de área por unidad de tiempo.

La **energía** de un objeto tampoco es un invariante Lorentz. Si un observador ve al objeto en reposo con energía m $(c\equiv 1)$, otro observador que lo vea moverse con velocidad v dirá que tiene una energía $m/\sqrt{1-v^2}$. Su energía es la componente temporal p_0 de un cuadrivector relativista

$$p_\mu = \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) \qquad [B.3]$$

La parte espacial p de este cuadrivector es la **cantidad de movimiento** del objeto.

La **densidad de energía** es la componente tiempo-tiempo T_{00} del tensor relativista $T_{\mu\nu}$, un tensor como lo es $p_\mu p_\nu$ Las otras componentes $T_{0\nu}$, tiempo – espacio, son o **densidades de la cantidad de movimiento** o **corrientes de energía**. Las componentes meramente espaciales T_{jk}, donde j y k son 1, 2, o 3, son las **corrientes de la cantidad de movimiento**. Dan la cantidad de movimiento que cruza la unidad de área por unidad de tiempo. Esto es, precisamente la **presión**.

En un universo uniformemente homogéneo en expansión, para aquellos observadores que ven en reposo la región más cercana del universo, $T_{\mu\nu}$ debe ser cero para $\mu \neq \nu$ ya que no hay ni cantidad de movimiento ni flujo de energía; y tampoco hay presión de cizalladura (o sea, que no hay flujo en la dirección x de la cantidad de movimiento en la dirección y). También

$$T_{11} = T_{22} = T_{33}$$

pues si no, una rotación de coordenadas haría T_{jk} no igual a cero para cualquier j diferente de k. Así que el tensor $T_{\mu\nu}$ queda como:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \qquad \text{[B.4]}$$

En un universo homogéneo, ρ y p deben mantenerse constantes a través del espacio. Solamente pueden ser funciones del tiempo.

Aplicando a $T_{\mu\nu}$ la transformación [B.2] se obtiene

$$T'_{00} = \frac{\rho + v^2 p}{1 - v^2} \qquad T'_{33} = \frac{p + v^2 \rho}{1 - v^2} \qquad \text{[B.5]}$$

Para que el tensor energía-momento sea invariante Lorentz, o sea que $T'_{\mu\nu}$ sea el mismo que el $T_{\mu\nu}$ original, se precisará por tanto que sea: $p = -\rho$

Como precisamente exigimos que el vacío sea invariante Lorentz, entonces es que

$$p_v = -\rho_v. \qquad \text{[B.6]}$$