



INDUSTRIALES
ETSII | UPM

ETSII – UPM

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA E

INGENIERÍA DE MATERIALES

**GUIÓN DE PRÁCTICA DE FÍSICA
PRIMER CURSO**

**PRÁCTICA Nº 2: DETERMINACIÓN
EXPERIMENTAL DEL COEFICIENTE DE
ROZAMIENTO ESTÁTICO DE DISTINTOS
MATERIALES**

PROFESORES GITI: D^a María Fe Laguna Heras (coordinadora de prácticas)

D. Juan Antonio Porro González

D. Rafael Muñoz

D. Ignacio Angulo

PROFESOR GIQ y GIO: D. Marcos Díaz Muñoz (coordinador de prácticas)

MADRID, SEPTIEMBRE DE 2017

ÍNDICE

1. OBJETIVOS.....	3
2. FUNDAMENTO TEÓRICO	3
3. MATERIAL Y EQUIPO UTILIZADOS.....	11
4. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL	18
ANEXO 1. RESULTADOS.....	25
ANEXO 2. COPIA DEL ANEXO 1 PARA ENTREGAR COMO RESULTADO DE LA PRÁCTICA.....	27
ANEXO 3. LEY DE PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRES Y ALGUNAS DEFICIONES ESTADÍSTICAS.....	29
ANEXO 4. INCERTIDUMBRE ASOCIADA A LAS MASAS DE LOS BLOQUES DE FRICCIÓN	31
ANEXO 5. INCERTIDUMBRE ASOCIADA A LAS PESAS DE RANURA	34
ANEXO 6. CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE EN LA DETERMINACIÓN DEL COEF. DE ROZAMIENTO.....	35
ANEXO 7. NORMA DE EXPRESIÓN DEL RESULTADO DE UNA MEDIDA.....	38

GUIÓN DE PRÁCTICA DE FÍSICA

DETERMINACION EXPERIMENTAL DEL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ESTÁTICO DE DISTINTOS MATERIALES

1. OBJETIVO

Determinar experimentalmente el coeficiente de rozamiento estático μ_e de distintos materiales aplicando la Segunda Ley de Newton por tres métodos distintos:

1. Realizar la medida con el plano en posición horizontal utilizando A) un dinamómetro y B) un contrapeso
2. Comparar el valor obtenido realizando la medida en plano horizontal por dos métodos: a) con dinamómetro y b) con pesas.
3. Para un ángulo fijo del plano inclinado evaluar el coeficiente de rozamiento estático con un contrapeso.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO

Cuando las superficies de dos cuerpos entran en contacto directo aparecen unas fuerzas denominadas de contacto, debidas fundamentalmente a interacciones de tipo electrostático entre los átomos o moléculas que constituyen ambos cuerpos. Un ejemplo de

fuerza de contacto es la fuerza normal que ejerce la superficie de un cuerpo como reacción al peso de otro objeto que descansa sobre aquella. Otra fuerza de contacto muy importante es la fuerza de fricción o rozamiento, que aparece cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie y que es la responsable de que disminuya su velocidad y finalmente se pare tras el impulso inicial, si no se sigue aplicando ninguna fuerza sobre él.

Si un cuerpo descansa o se desliza por una superficie la fuerza de contacto que la superficie ejerce sobre el cuerpo se puede representar en términos de una componente perpendicular a la superficie, la fuerza normal, y otra paralela a dicha superficie y, por tanto, perpendicular a la normal, denominada fuerza de fricción (figura 1).

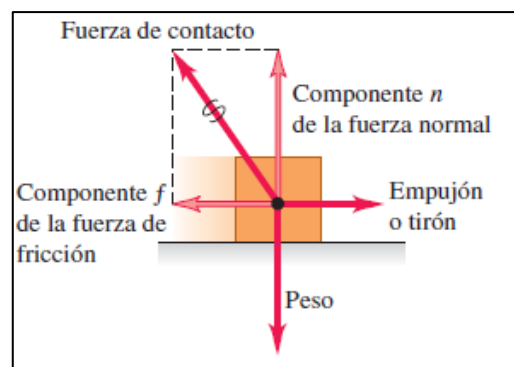


Figura 1

Ésta siempre se opone al movimiento del cuerpo que se desliza, por lo que su dirección es la opuesta a la de la velocidad del mismo.

El fenómeno del rozamiento entre dos cuerpos es bastante complejo porque depende de varios factores, como la rugosidad y naturaleza de las superficies en fricción, la velocidad relativa de deslizamiento, etc. No obstante, para muchos propósitos prácticos puede verificarse experimentalmente que la magnitud de la fuerza de rozamiento, F_r , es proporcional a la fuerza normal, N :

$$F_r = \mu_d \cdot N \quad (1)$$

donde la constante de proporcionalidad, μ_d , se denomina coeficiente de rozamiento cinético o dinámico, para el caso en el que se produzca deslizamiento. La expresión (1) no es una ecuación vectorial, puesto que F_r y N son siempre perpendiculares, sino una relación escalar entre las magnitudes de las dos fuerzas que nos da la fuerza necesaria para mantener dos cuerpos en movimiento relativo con velocidad uniforme. Como se dijo al principio, el rozamiento o fricción tiene su origen en el gran número de interacciones que se producen a nivel microscópico entre las moléculas de los dos cuerpos en contacto. Desde este punto de vista, se debe tratar como un concepto estadístico y considerar la fuerza F_r como una magnitud macroscópica que representa la suma de todas esas interacciones. Como es imposible considerarlas individualmente se determinan de manera colectiva mediante

métodos experimentales, quedando representadas de manera aproximada por el coeficiente de rozamiento.

Las fuerzas de fricción son disipativas, por lo que es muy importante tenerlas en cuenta desde un punto de vista ingenieril, ya que pueden causar el desgaste de piezas móviles en las máquinas y suponer pérdidas de potencia; por ejemplo, en los coches hasta un 20% de la potencia se emplea en contrarrestar las fuerzas de rozamiento. Sin embargo, gracias a ellas podemos caminar o detenernos o lograr que las ruedas de los vehículos rueden y no patinen.

Las fuerzas de rozamiento también pueden actuar aunque no exista movimiento relativo entre los cuerpos en contacto. Para poder mover un cuerpo que descansa en reposo sobre una superficie es necesario aplicar una fuerza al menos de igual magnitud que la fuerza de rozamiento que la superficie ejerce sobre el cuerpo y que se opone a su movimiento. Dicha fuerza de fricción puede tener cualquier valor entre cero (cuando no se aplica ninguna fuerza sobre el objeto) y un valor máximo que coincide con la magnitud crítica de la fuerza aplicada para poner el cuerpo en situación de deslizamiento inminente, es decir, cuando el movimiento está a punto de comenzar. Experimentalmente se ha observado que, en general, dicho valor,

llamado $F_{r(max)}$, es aproximadamente proporcional a la fuerza normal, N , denominándose a la constante de proporcionalidad coeficiente de rozamiento estático, μ_e . Por tanto, podemos escribir:

$$F_r \leq \mu_e \cdot N \quad (2)$$

Al igual que la ecuación (1), esta tampoco es una expresión vectorial y la igualdad sólo se cumple cuando la fuerza aplicada paralela a la superficie alcanza el valor crítico mencionado anteriormente. Una vez iniciado el deslizamiento la fuerza de fricción en general disminuye, por lo que el coeficiente de rozamiento cinético suele ser menor que el estático.

En el caso de un cuerpo que descansa sobre un plano horizontal se podría determinar el coeficiente de rozamiento estático midiendo la fuerza crítica paralela al plano para iniciar el movimiento mediante, por ejemplo, un dinamómetro. Otro método experimental consistiría en colgar una masa conocida de una cuerda sujeta al cuerpo, como se muestra en la figura 2.

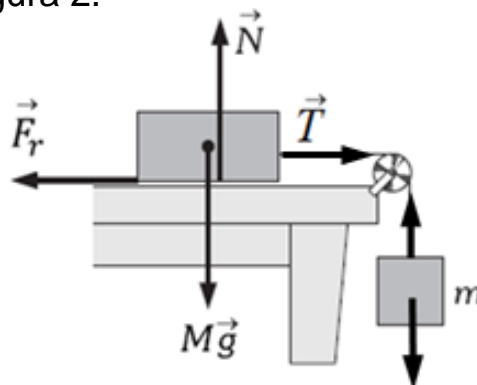


Figura 2

A partir del diagrama de cuerpo libre de la figura se puede deducir que si m es la masa que hace que el cuerpo de masa M inicie su movimiento, en ese instante se verifica que:

$$F_r = m \cdot g = \mu_e \cdot M \cdot g \quad (3)$$

Y por tanto,

$$\boxed{\mu_e = \frac{m}{M}} \quad (4)$$

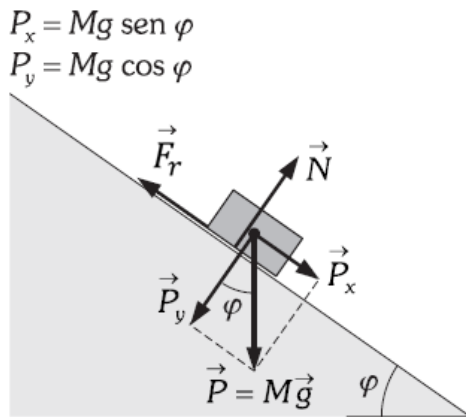


Figura 3

El plano inclinado proporciona otro método de medida de μ_e y μ_d . En este caso N no es igual al peso del cuerpo; así por ejemplo: si éste se encuentra sobre un plano que podemos inclinar y sobre él no

actúan más fuerzas que su peso, la de rozamiento y la reacción normal del plano entonces, a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 3 se obtiene:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = Mg \cos \varphi \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N = P_y = Mg \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_r = \mu Mg \cos \varphi} \quad (5)$$

siendo μ el coeficiente estático o el dinámico, según que el cuerpo inicie el deslizamiento o esté ya deslizando con movimiento uniforme.

En el primer caso:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \begin{cases} \sum F_x = P_x - F_r = P_x - \mu_e N = 0 \Rightarrow M g \sin \varphi = \mu_e M g \cos \varphi \\ \sum F_y = N - P_y = 0 \Rightarrow N = P_y = M g \cos \varphi \end{cases}$$

De donde:

$$\boxed{\mu_e = \operatorname{tg} \varphi} \quad (6)$$

Cuando el cuerpo se desliza con velocidad uniforme se verifica:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \begin{cases} \sum F_x = P_x - F_r = P_x - \mu_d N = 0 \Rightarrow M g \sin \varphi = \mu_d M g \cos \varphi \\ \sum F_y = N - P_y = 0 \Rightarrow N = P_y = M g \cos \varphi \end{cases}$$

Y queda:

$$\boxed{\mu_d = \operatorname{tg} \varphi} \quad (7)$$

Por tanto, una medida precisa del ángulo de inclinación nos daría los coeficientes de rozamiento estático o dinámico.

En la figura 4 se ha representado la fuerza horizontal aplicada, F , a un cuerpo en reposo sobre un plano horizontal para ponerlo en movimiento, aumentándola desde cero, frente a la fuerza de rozamiento. Como se puede observar, una vez que el cuerpo está deslizándose, para cualquier valor de la fuerza aplicada F_r siempre será igual a $\mu_d N$. Si el valor de la fuerza aplicada es F_1 , entonces el

cuerpo se moverá con velocidad constante; si es mayor el movimiento será acelerado y si es menor será decelerado.

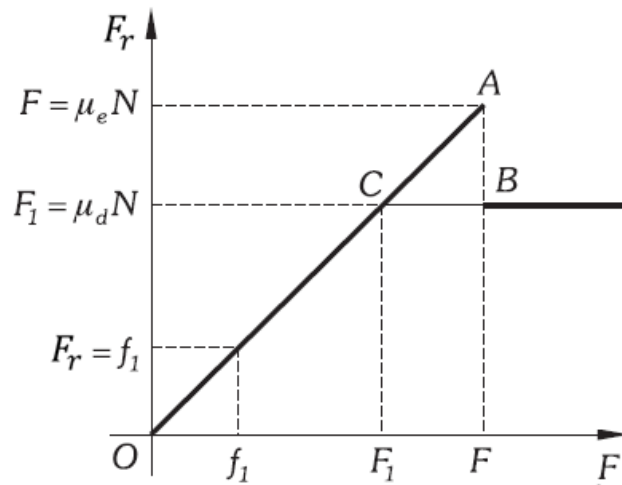


Figura 4

El coeficiente de rozamiento no solamente depende de la naturaleza de los materiales, también depende de sus condiciones, es decir, del grado de pulimentación de las superficies en contacto, de la temperatura, de las películas superficiales o de la atracción molecular entre los materiales en contacto que pueden producir microsoldaduras que se forman y se rompen continuamente durante el deslizamiento. De ahí que la fuerza de rozamiento durante el deslizamiento no sea perfectamente constante.

3. MATERIAL Y EQUIPO UTILIZADOS

3.1. Plano inclinado

Es un aparato (fig. 5) que sirve para el estudio de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en un plano inclinado y para determinar la fuerza de tensión colgante en función del ángulo de inclinación. Consta de una base y un plano metálicos, con escalas para la medición del ángulo de inclinación, longitud y altura, y una polea de desviación. El ángulo de inclinación es regulable de 0° a 45° y se puede fijar mediante un tornillo.

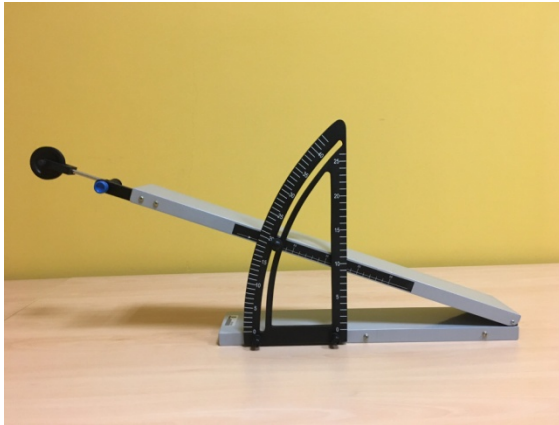


Figura 5

3.2. Dinamómetro de 2N

Un dinamómetro de resorte (ver fig. 6) es un instrumento que, a partir de los cambios en la elasticidad de un muelle con una determinada calibración, permite determinar el peso de un cuerpo o realizar la medición de una fuerza de tracción. Fue inventado por Isaac Newton y se basa en la ley de Hooke, la cual establece que la fuerza requerida para estirar o comprimir un muelle es directamente proporcional a la distancia de estiramiento o compresión, x . La

relación entre la fuerza de restitución F_e y la elongación x , está dada por la ecuación:

$$F_e = -kx$$

donde k es la constante de elasticidad, la cual proporciona información sobre la rigidez del resorte. El signo menos indica que F_e se opone al desplazamiento. Como se aprecia en la figura, el resorte se encuentra en el interior de un cilindro hueco transparente, con una escala graduada en las unidades correspondientes, unido por su extremo superior a un gancho, y por el inferior a una varilla que termina también en un gancho, el cual permite colgar o tirar de los objetos.



Figura 6

Cuando se produce el estiramiento del resorte, un cursor unido al extremo inferior del mismo se desplaza sobre la escala dando el valor de la fuerza. El campo de medida va de 0 a 2 N y la división de escala es 0.02 N.

3.3. Balanza de dos platos con brazos iguales

Es un instrumento para medir la masa de un objeto, constituido por una palanca con un punto de giro central y dos brazos iguales de cuyos extremos cuelgan o descansan dos platos en los que se colocan los objetos a medir y las masas patrón.

La medida de la masa del objeto a determinar se realiza mediante el equilibrio entre la fuerza que crea en el extremo de uno de los brazos la acción de la gravedad, que origina un momento de giro alrededor del punto central de la palanca, con la fuerza del mismo tipo originada por una o varias masas patrón colocadas en el otro plato. La indicación del desequilibrio entre las dos fuerzas, que se traduce en la diferencia entre las masas, se puede realizar por medio de una aguja o fiel unida al punto central de la palanca.

En la presente práctica se utilizará una balanza de dos platos con brazos iguales, ver figura 7, con una capacidad de 2 kg, un único punto en su campo de medida para indicar el equilibrio, y una escala con pesa corredera sobre una regla con campo de capacidad hasta 10 g con divisiones de 0,1 g.

En esta práctica la pesa corredera se empleará para tarar y se medirá con la balanza empleando su único punto indicativo del equilibrio entre los patrones y la masa del objeto a determinar.



Figura 7

3.4. Masas patrón (SCI M.01.01)

Las masas patrón son objetos que se emplean para materializar la unidad de masa y sus múltiplos y submúltiplos, en la calibración de un gran número de instrumentos de medida, siguiendo tanto métodos diferenciales como directos.

Su nominal (la masa que representan), forma y material se encuentran especificados en la normativa de aplicación (R111 de la OIML), en la que también se establecen clases en función de la tolerancia admitida para su desviación del nominal, ver tabla del Anexo 4, con lo que se facilita su empleo sin considerar su desviación real al nominal.

Se suelen utilizar en forma de juegos de masas que materializan diversos nominales, algunos duplicados, para poder definir nominales superiores por composición, estando dispuestos en estuches o cajas.

Las masas patrón que se van a emplear en esta práctica componen un juego de Clase M1 (figura 8), compuesto por:

- 1 masa de 500 g,
- 1 masa de 200 g
- 2 masas de 100 g
- 1 masa de 50 g
- 1 masa de 20 g
- 2 masas de 10 g
- 1 masa de 5 g
- 2 masas de 2 g
- 1 masa de 1 g
- 1 masa de 500 mg
- 2 masas de 200 mg
- 1 masa de 100 mg



Figura 8

3.5. Bloques para experimentos de fricción

3.5.1. Bloque de madera con recubrimiento de caucho

En esta práctica se utilizará un bloque de madera (ver figura 9), con una de sus caras totalmente recubierta con una lámina de caucho, de dimensiones $20 \times 60 \times 60 \text{ mm}^3$.



Figura 9

3.5.2. Bloque de aluminio

También se utilizará un bloque de aluminio (ver figura 10) cuyas dimensiones son $55 \times 50 \times 25 \text{ mm}^3$. Está provisto de dos ganchos para realizar diferentes experiencias de fricción.



Figura 10

3.6. Conjunto de pesas con ranura y portapesas

Para la determinación de la fuerza de fricción a partir de la tensión que produce una masa colgante atada a los bloques de

fricción, tanto en el caso del plano horizontal como del inclinado, se usarán un conjunto de masas patrón de latón a modo de pesas junto con un portapesas de plástico (ver figura 11), cuya masa es 5 g. El juego de pesas está compuesto por:

1 masas de 100 g

1 masas de 50 g

1 masas de 20 g

1 masas de 10 g

1 masas de 5 g

1 masas de 2 g



Figura 11

Las incertidumbres asociadas a todas ellas se indican en el Anexo 5.

4. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

1) Determinar la masa de los dos bloques de madera y del bloque de aluminio con la balanza de precisión y la caja de masas patrón siguiendo el siguiente procedimiento:

2) Calibrar la balanza con un tornillo que posee bajo el plato derecho, manteniendo la pesa corredera en el cero.

En ambos casos la masa total del bloque será la suma de las masas patrón colocadas para equilibrar la balanza.

3) Pesar los bloques para experimentos de fricción mediante el método de la doble pesada o transposición de Gauss, que se realiza con el objeto de evitar los posibles desequilibrios de los brazos de la balanza, derivados de su fabricación.

Para ello primero se coloca el bloque cuya masa se quiere determinar primero en uno de los platos y en el otro plato se van colocando las masas patrón necesarias para equilibrar la balanza.

Anotar el valor de cada una de las masas utilizadas, ya que será necesario para calcular la incertidumbre asociada a la masa más adelante. A continuación repetir el procedimiento pero cambiando el bloque de plato. Se obtienen de este modo dos valores de masa: la masa obtenida en el plato derecho y la obtenida en el plato izquierdo.

Las ecuaciones de los momentos que generan las masas que cargan los extremos de los brazos de la balanza, de longitudes l_d y l_i vienen dadas por:

$$M l_d = m_{0i} l_i \quad (8)$$

$$M l_i = m_{0d} l_d \quad (9)$$

siendo:

l_i = longitud del brazo izquierdo de la balanza.

l_d = longitud del brazo derecho de la balanza.

m_{0i} = masa que se coloca en el plato izquierdo para equilibrar el bloque que se quiere pesar

m_{0d} = masa que se coloca en el plato derecho para equilibrar el bloque que se quiere pesar

M = masa del bloque (bloque de madera o de aluminio)

A partir de las ecuaciones (8) y (9) y operando, la masa del bloque se calcula mediante la expresión:

$$M = \sqrt{m_{0i} \cdot m_{0d}} \quad (10)$$

Anotar los resultados y calcular su incertidumbre expandida, U_M , como se indica en el anexo 4.

4) Determinación del coeficiente de rozamiento estático con el plano en posición horizontal

Con el plano situado en posición horizontal (ángulo 0) medir la fuerza de rozamiento como la tensión T generada en los bloques de madera y de aluminio para ponerlos en situación de deslizamiento inminente.

La tensión generada se medirá por dos métodos:

7.A) Con un dinamómetro

En primer lugar se debe calibrar el dinamómetro ajustándolo al cero. Para ello se afloja la tuerca superior que se encuentra en la parte superior del dinamómetro y se gira el enganche superior hasta que el cursor está en cero; para fijarlo en esta marca se vuelve a apretar la tuerca mencionada anteriormente (ver figura 12).



Figura 12

A continuación se engancha el dinamómetro al bloque y se tira lentamente del dinamómetro hasta que se observe que el bloque empieza a moverse.

IMPORTANTE: El dinamómetro debe mantenerse horizontal en todo momento paralelo al plano, como se muestra en la figura 13.

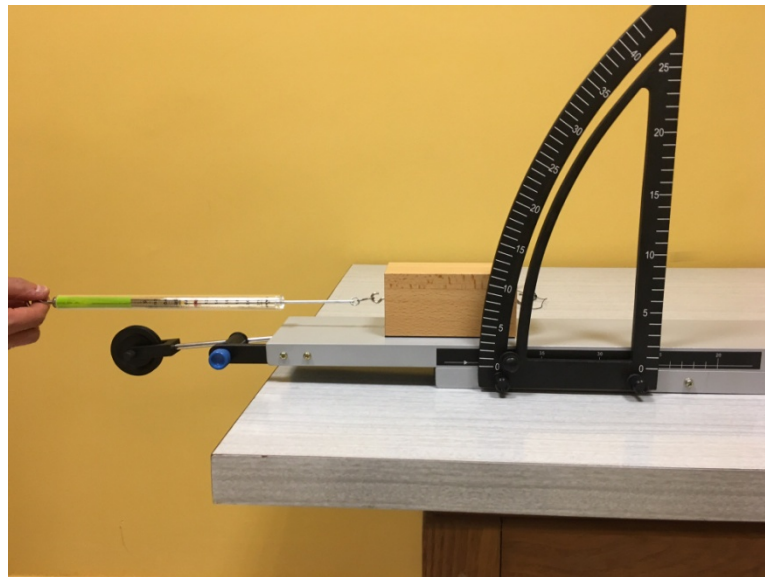


Figura 13

Se realizarán 5 medidas y se tomará como medida su valor medio.

En el momento justo en el que el bloque comienza a moverse la fuerza o tensión medida con el dinamómetro, que se tomará como el valor promedio de las 5 medidas, será igual a la fuerza de rozamiento, por lo tanto:

$$T = F_r = \mu_e N \Rightarrow \mu_e = \frac{T}{N} \quad (11)$$

El cálculo de la incertidumbre expandida del coeficiente de rozamiento, U_{μ_e} , medido mediante este método se desarrolla en el anexo 6 (apartado A.6.1.)

7.B) Con una masa colgante como contrapeso

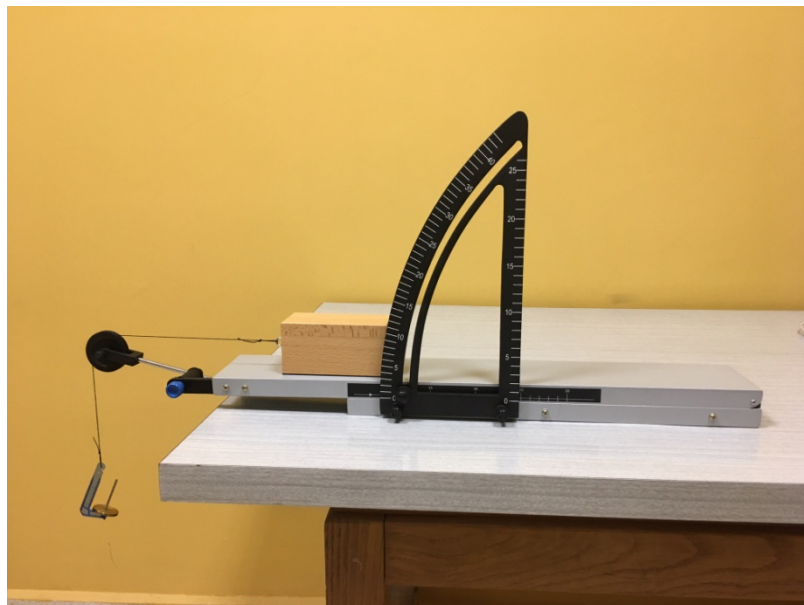


Figura 14

Se ata el hilo con el portapesas al bloque procurando orientar la polea de forma que el hilo quede lo más horizontal posible según la figura 14. Se van añadiendo pesas de mayor a menor hasta que se produzca movimiento inminente. En este instante, la fuerza de rozamiento es igual a la tensión del hilo, cuyo valor será $T = m \cdot g$, siendo m la suma de la masa de las pesas más la del soporte (5

gramos). El cálculo de la incertidumbre expandida en la masa de las pesas, U_m , se indica en el anexo 5.

Por tanto, aplicando la ecuación (3) resulta:

$$F_r = T = m \cdot g = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot M \cdot g \quad (12)$$

con M = masa de cada bloque obtenida con la balanza y g el valor de la aceleración debida a la gravedad ($g = 9,80 \text{ m/s}^2$). De esta forma se obtiene el valor de μ_e del bloque de madera y del bloque de aluminio, aplicando la ecuación (4).

Anotar los resultados y calcular también por este método el coeficiente de rozamiento estático y su incertidumbre expandida asociada a partir de las expresiones desarrolladas en el Anexo 6 (aptdo. A.6.2.). Comparar los resultados.

5) Evaluación del coeficiente de rozamiento estático con el plano inclinado a un ángulo fijo y contrapeso

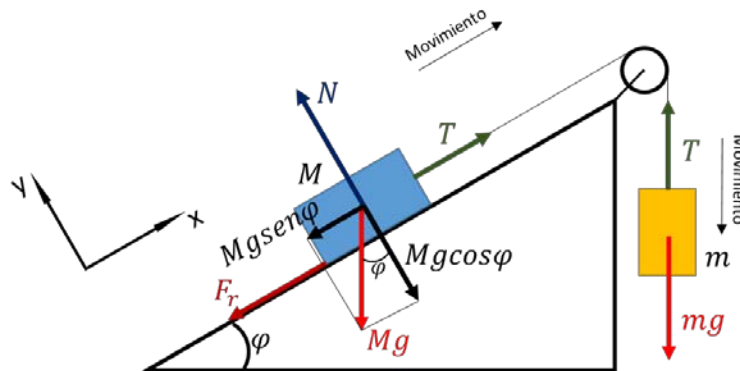


Figura 15

Haciendo el mismo análisis para el cuerpo libre que condujo a la ecuación (6), pero ahora considerando que existe una tensión T , para el movimiento inminente hacia arriba de M se cumple:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = T - F_r - M \cdot g \cdot \operatorname{sen}\varphi = 0 \\ \sum F_y = N - M \cdot g \cdot \operatorname{cos}\varphi = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Siendo $T = m \cdot g$.

En el límite máximo de la fuerza de rozamiento (movimiento inminente hacia arriba) tenemos:

$$mg - \mu_e N - Mgsen\varphi = mg - \mu_e Mg\operatorname{cos}\varphi - Mgsen\varphi = 0$$

De donde, despejando el coeficiente de rozamiento obtenemos:

$$\mu_e = \frac{mg - Mg \operatorname{sen}\varphi}{Mg \operatorname{cos}\varphi} \quad (14)$$

Para realizar el experimento se fijará el plano inclinado a un ángulo de 10° . A continuación se coloca el bloque y enganchado a él el portapesas y se van colocando las pesas hasta que se produzca movimiento inminente hacia arriba. Cuando se produce ese movimiento incipiente se anota la masa de las pesas colocadas y se calcula el coeficiente de rozamiento estático de acuerdo con la expresión (14) y su incertidumbre siguiendo el apartado A.6.3. del Anexo 6.

PRACTICA 2

NOMBRE:

Nº MATR.:

ANEXO 1: Determinación experimental de los coeficientes de rozamiento estático de diferentes materiales.

- 1) Determinación de la masa de los bloques con la balanza de precisión

	Masa plato izq. m_{oi} (kg)	Masa plato dcho. m_{od} (kg)	masa del bloque M (kg)	U_M (kg)
Bloque madera				
Bloque de aluminio				

- 2) Cálculo del coeficiente de rozamiento estático de los bloques con el plano en posición horizontal (ángulo 0)

A) Medida de la tensión T con el dinamómetro

	Medida 1 T_1 (N)	Medida 2 T_2 (N)	Medida 3 T_3 (N)	Medida 4 T_4 (N)	Medida 5 T_5 (N)	Media < T >	u_T^* (N)
Bloque madera							
Bloque aluminio							

u_T^* = incertidumbre típica de la tensión medida con el dinamómetro

	Bloque madera	Bloque aluminio
μ_e		
$U\mu_e$		

B) Medida con las pesas de ranura

	Masa colgante m (kg)	$U_m(\text{kg})$	μ_e	U_{μ_e}
Bloque madera				
Bloque aluminio				

3) Cálculo del coeficiente de rozamiento estático de los bloques con plano inclinado en ángulo 10°

	Masa colgante m (kg)	$U_m(\text{kg})$	μ_e	U_{μ_e}
Bloque madera				
Bloque aluminio				

Pregunta: A la vista de los resultados, ¿qué metodología te parece más precisa para obtener el valor del coeficiente de rozamiento estático μ_e de los materiales propuestos?

PRACTICA 2

NOMBRE:

Nº MATR.:

ANEXO 1: Determinación experimental de los coeficientes de rozamiento estático de diferentes materiales.

- 4) Determinación de la masa de los bloques con la balanza de precisión

	Masa plato izq. m_{oi} (kg)	Masa plato dcho. m_{od} (kg)	masa del bloque M (kg)	U_M (kg)
Bloque madera				
Bloque de aluminio				

- 5) Cálculo del coeficiente de rozamiento estático de los bloques con el plano en posición horizontal (ángulo 0)

C) Medida de la tensión T con el dinamómetro

	Medida 1 T_1 (N)	Medida 2 T_2 (N)	Medida 3 T_3 (N)	Medida 4 T_4 (N)	Medida 5 T_5 (N)	Media < T >	u_T^* (N)
Bloque madera							
Bloque aluminio							

u_T^* = incertidumbre típica de la tensión medida con el dinamómetro

	Bloque madera	Bloque aluminio
μ_e		
$U\mu_e$		

D) Medida con las pesas de ranura

	Masa colgante m (kg)	$U_m(\text{kg})$	μ_e	U_{μ_e}
Bloque madera				
Bloque aluminio				

6) Cálculo del coeficiente de rozamiento estático de los bloques con plano inclinado en ángulo 10°

	Masa colgante m (kg)	$U_m(\text{kg})$	μ_e	U_{μ_e}
Bloque madera				
Bloque aluminio				

Pregunta: A la vista de los resultados, ¿qué metodología te parece más precisa para obtener el valor del coeficiente de rozamiento estático μ_e de los materiales propuestos?

ANEXO 3

LEY DE PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRES Y ALGUNAS

DEFINICIONES ESTADÍSTICAS

Si el resultado de una medida y de una determinada magnitud viene dado por una función de transferencia que depende de una serie de variables independientes $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la incertidumbre típica de y viene dada por la siguiente expresión:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2} \quad (15)$$

Siendo u_{x_i} la incertidumbre típica de x_i . Se denominan coeficientes de sensibilidad de cada una de las variables x_i a $\frac{\partial y}{\partial x_i}$.

Algunas definiciones estadísticas

- Media aritmética de un conjunto de J valores:

$$\bar{X} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{j=J} X_j \quad (16)$$

- Varianza:

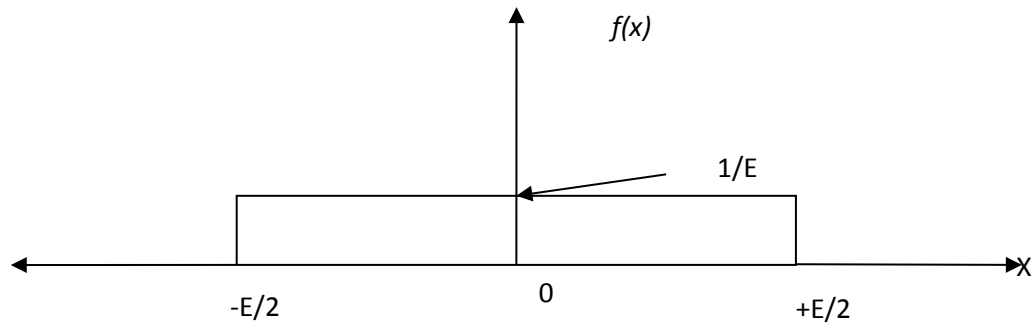
$$s^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{i=1}^J (x_i - \bar{x})^2 \quad (17)$$

- Varianza de la media:

$$s^2(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^J (x_i - \bar{x})^2}{J(J-1)} = \frac{s^2}{J} \quad (18)$$

Nótese que no es igual a la varianza de las medidas. Su raíz cuadrada es la desviación estándar o típica de la media aritmética de las medidas realizadas.

Cálculo de la incertidumbre típica de una distribución rectangular correspondiente a la división de escala



$$s^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{E} \int_{-\frac{E}{2}}^{+\frac{E}{2}} x^2 \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{E}{2}}^{+\frac{E}{2}} = \frac{E^2}{12} \quad (20)$$

$$s^2(\bar{X}) = u_E^2 = \frac{V(x)}{J} = \frac{E^2}{12 \cdot J} \quad (21)$$

$$u_e = \frac{E}{2 \cdot \sqrt{3 \cdot J}} \quad (22)$$

Si los límites de la distribución son $(-D_{m\acute{a}x}, +D_{m\acute{a}x})$, su varianza viene dada por la expresión:

$$s^2(x) = u^2 = \frac{(2 \cdot D_{m\acute{a}x})^2}{12} = \frac{D_{m\acute{a}x}^2}{3} \quad (23)$$

$$u = \frac{D_{m\acute{a}x}}{\sqrt{3}} \quad (24)$$

ANEXO 4

CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE ASOCIADA A LA DETERMINACIÓN DE LAS MASAS DE LOS BLOQUES

Su incertidumbre se obtendrá al aplicar la ley de propagación de varianzas a la expresión (10), considerando que las masas son independientes:

$$u_M^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial m_{od}} \right)^2 \cdot u_{m_{od}}^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial m_{oi}} \right)^2 \cdot u_{m_{oi}}^2 \quad (25)$$

Resulta:

$$u_M^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot m_{oi}^{\frac{1}{2}} \cdot m_{od}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \cdot u_{m_{od}}^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot m_{od}^{\frac{1}{2}} \cdot m_{oi}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \cdot u_{m_{oi}}^2 \quad (26)$$

Operando:

$$u_M^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{m_{oi}}{m_{od}} \cdot u_{m_{od}}^2 + \frac{m_{od}}{m_{oi}} \cdot u_{m_{oi}}^2 \right) \quad (27)$$

Teniendo en cuenta que $u_{m_{od}} \cong u_{m_{oi}} \cong u_{m_0}$

Resulta:

$$u_M^2 = \frac{1}{4} \cdot u_{m_0}^2 \cdot \left(\frac{m_{oi}}{m_{od}} + \frac{m_{od}}{m_{oi}} \right) \quad (28)$$

con la incertidumbre típica, se calculará la incertidumbre expandida para un nivel de confianza del 95 %, aplicando el factor de cobertura $k=2$, mediante la ecuación:

$$U_M = k \cdot u_M = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot u_{m_0} \cdot \sqrt{\frac{m_{oi}}{m_{od}} + \frac{m_{od}}{m_{oi}}} \quad (29)$$

Operando resulta:

$$U_M = u_{m0} \cdot \sqrt{\frac{m_{0i}}{m_{0d}} + \frac{m_{0d}}{m_{0i}}} \quad (30)$$

en donde:

U_M = Incertidumbre expandida de la masa del bloque.

u_{m0} = Incertidumbre típica de la masa que materializan las $j=1$ a J masas patrón sobre el plato, con las incertidumbres individuales de cada una de ellas, u_{m0j} , de la medida (sobre el plato izquierdo o sobre el derecho) en la que se haya obtenido el mayor valor de masa; se calcula como:

$$u_{m0} = \left(\sum_{j=1}^J u_{m0j} \right)_{\text{máx}} \quad (31)$$

Las incertidumbres de cada masa patrón se deducen de la tabla 1, en función de su clase (clase M1) y su nominal mediante la ecuación:

$$u_{m0j} = \frac{D_{\text{máxj}}}{\sqrt{3}} \quad (32)$$

Siendo $D_{\text{máxj}}$ = desviación al nominal máxima admisible de la masa j -ésima, de la tabla 1.

TABLA 1

MASAS PATRÓN. Desviaciones al nominal máximas admisibles según calidad y nominal (R111 de la OIML)

Valor nominal	Desviación al nominal máxima admisible para masas patrón ($\pm D_{\text{máx}}$ en mg)								
	Clase E ₁	Clase E ₂	Clase F ₁	Clase F ₂	Clase M ₁	Clase M ₁₋₂	Clase M ₂	Clase M ₂₋₃	Clase M ₃
5 000 kg			25 000	80 000	250 000	500 000	800 000	1 600 000	2 500 000
2 000 kg			10 000	30 000	100 000	200 000	300 000	600 000	1 000 000
1 000 kg		1 600	5 000	16 000	50 000	100 000	160 000	300 000	500 000
500 kg		800	2 500	8 000	25 000	50 000	80 000	160 000	250 000
200 kg		300	1 000	3 000	10 000	20 000	30 000	60 000	100 000
100 kg		160	500	1 600	5 000	10 000	16 000	30 000	50 000
50 kg	25	80	250	800	2 500	5 000	8 000	16 000	25 000
20 kg	10	30	100	300	1 000		3 000		10 000
10 kg	5	16	50	160	500		1 600		5 000
5 kg	2.5	8	25	80	250		800		2 500
2 kg	1	3	10	30	100		300		1 000
1 kg	0.5	1.6	5	16	50		160		500
500 g	0.25	0.8	2.5	8	25		80		250
200 g	0.1	0.3	1	3	10		30		100
100 g	0.05	0.16	0.5	1.6	5		16		50
50 g	0.03	0.1	0.3	1	3		10		30
20 g	0.025	0.08	0.25	0.8	2.5		8		25
10 g	0.02	0.06	0.2	0.6	2		6		20
5 g	0.016	0.05	0.16	0.5	1.6		5		16
2 g	0.012	0.04	0.12	0.4	1.2		4		12
1 g	0.01	0.03	0.1	0.3	1		3		10
500 mg	0.008	0.025	0.08	0.25	0.8		2.5		
200 mg	0.006	0.02	0.06	0.2	0.6		2		
100 mg	0.005	0.016	0.05	0.16	0.5		1.6		
50 mg	0.004	0.012	0.04	0.12	0.4				
20 mg	0.003	0.01	0.03	0.1	0.3				
10 mg	0.003	0.008	0.025	0.08	0.25				
5 mg	0.003	0.006	0.02	0.06	0.2				
2 mg	0.003	0.006	0.02	0.06	0.2				
1 mg	0.003	0.006	0.02	0.06	0.2				

ANEXO 5

INCERTIDUMBRE ASOCIADA A LAS PESAS DE RANURA

La incertidumbre en la masa de las pesas de ranura empleadas en los experimentos de medida del coeficiente de rozamiento mediante la tensión generada por un contrapeso, se calcularán mediante la expresión:

$$U_m = 2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n u_{m_i}^2} \quad (33)$$

donde u_{m_i} es la incertidumbre típica de cada pesa i -ésima utilizada para cargar el contrapeso hasta que se produce el deslizamiento del bloque, la cual se puede obtener a partir de la incertidumbres expandidas que figuran en la tabla 2.

TABLA 2

Masa (g)	U* (mg)
100	48
50	30
20	24
10	18
5	50
2	40
1	20

U*= Incertidumbre expandida obtenida aplicando el factor de confianza habitual $k=2$ (nivel de confianza del 95%)

ANEXO 6

CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE EN LA DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO

A.6.1. Mediante un dinamómetro con el plano en posición horizontal

La función de transferencia vendrá dada por la expresión (11):

$$\mu_e = \frac{T}{N} = \frac{T}{Mg}$$

Aplicando la ley de propagación de incertidumbres (15) a esta expresión se obtiene la incertidumbre típica combinada asociada a esta medida:

$$u_{\mu_e}^2 = \left(\frac{1}{Mg}\right)^2 \cdot u_T^2 + \left(\frac{T}{M^2g}\right)^2 \cdot u_M^2 \quad (33)$$

donde u_T es la incertidumbre típica asociada a la tensión medida con el dinamómetro y u_M es la asociada a la masa de los bloques dada por la ecuación (30).

u_T viene dada por la siguiente expresión:

$$u_T^2 = \frac{s_T^2}{J} + \frac{E_{T0}^2}{12J} \quad (34)$$

donde el primer término de la derecha es la incertidumbre por repetibilidad, que procede de la reiteración de medidas y que se corresponde con la desviación típica, donde la varianza de las medidas de tensión, s_T^2 , está dada por la ecuación:

$$s_T^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{i=1}^J (T_i - \bar{T})^2 \quad (35)$$

Siendo J el número de medidas realizadas, en este caso 5, y \bar{T} la tensión promedio.

El segundo término corresponde a la incertidumbre por división de escala del dinamómetro, $E_{T0} = 0.02 \text{ N}$.

La incertidumbre expandida para la medida del coeficiente de rozamiento, aplicando el factor de cobertura habitual $k = 2$, será:

$$U_{\mu_e} = 2 \cdot \sqrt{u_{\mu_e}^2} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{Mg}\right)^2 \cdot u_T^2 + \left(\frac{T}{M^2g}\right)^2 \cdot u_M^2} \quad (33)$$

A.6.2. Mediante la tensión generada por una masa colgante, m , (contrapeso) con el plano en posición horizontal

En este caso se aplica la ley de propagación de incertidumbres a la función de transferencia dada por la ecuación (3):

$$\mu_e = \frac{m}{M}$$

Y se obtiene la siguiente expresión:

$$u_{\mu_e}^2 = \left(\frac{1}{M}\right)^2 \cdot u_m^2 + \left(\frac{m}{M^2}\right)^2 \cdot u_M^2 \quad (34)$$

donde u_m es la incertidumbre asociada a la masa de las pesas de ranura que actúan como contrapeso, cuyo cálculo se ha descrito en el anexo 5; y u_M es la de la masa del bloque utilizado, que se calcula siguiendo el anexo 4.

La incertidumbre expandida, aplicando el factor de cobertura que da un nivel de confianza del 95%, $k = 2$, viene dada por la ecuación:

$$U_{\mu_e} = 2 \cdot \sqrt{u_{\mu_e}^2} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{M}\right)^2 \cdot u_m^2 + \left(\frac{m}{M^2}\right)^2 \cdot u_M^2} \quad (35)$$

A.6.3. Mediante la tensión generada por una masa colgante, m , (contrapeso) con el plano inclinado un ángulo de 10°

Ahora aplicando la ley de propagación de incertidumbres a la función de transferencia dada por la ecuación (14):

$$\mu_e = \frac{mg - Mg \operatorname{sen} \varphi}{Mg \operatorname{cos} \varphi}$$

se llega a la expresión:

$$u_{\mu_e}^2 = \left(\frac{1}{M \operatorname{cos} \varphi} \right)^2 \cdot u_m^2 + \left(\frac{m}{M^2 \operatorname{cos} \varphi} \right)^2 \cdot u_M^2 \quad (36)$$

Y, finalmente, la incertidumbre expandida asociada al coeficiente de rozamiento determinado por este método sería:

$$U_{\mu_e} = 2 \cdot \sqrt{u_{\mu_e}^2} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{M \operatorname{cos} \varphi} \right)^2 \cdot u_m^2 + \left(\frac{m}{M^2 \operatorname{cos} \varphi} \right)^2 \cdot u_M^2} \quad (37)$$

ANEXO 7

NORMA DE EXPRESIÓN DEL RESULTADO DE UNA MEDIDA

De acuerdo con la normativa EA-4/02, el resultado completo de una medida, valor, incertidumbre y unidad, debe cumplir las reglas sencillas que se exponen a continuación.

1. La incertidumbre ha de expresarse mediante **una o dos** cifras significativas.
2. La incertidumbre se redondeará siempre por exceso, salvo que pueda redondearse por defecto en menos o igual del 5%.
3. El valor ha de expresarse con las mismas cifras significativas que la incertidumbre.
4. El valor se redondeará al valor más cercano y en caso de estar centrado (acabado en 5), al valor par.
5. Las reglas anteriores se entenderán como aplicables a la incertidumbre expandida, por lo que para obtener la expresión final del resultado completo de la medida, el primer paso será aplicar las referentes a dicha incertidumbre y después al valor.