INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE ERRORES

1.- Introducción

La medida de una magnitud física implica:

- compararla con una cantidad de la misma magnitud que se toma como unidad, dando el valor numérico y la unidad empleada.

- valorar la calidad de dicha medida ya que siempre que se realiza un proceso de medición se tiene, implícito a él, un error. Este error se define como la desviación entre el valor esperado de la magnitud y su valor verdadero y se pueden clasificar en:

  - errores sistemáticos, asociados a defectos en el método o en el instrumento de medida, producirán una desviación siempre en un mismo sentido, es decir, por defecto o por exceso. Ejemplo: incorrecta calibración del instrumento de medida
  - errores de tipo accidental, son los que se producen por causas difíciles o imposibles de controlar. Producen desviaciones al azar, es decir, tanto por exceso como por defecto. Esta distribución permite su tratamiento estadístico, determinando el valor más probable y el margen de incertidumbre en la medida.

Por otra parte también influyen en el proceso de medida las denominadas magnitudes de influencia; por ejemplo, la de la temperatura en la medida de una longitud.
La determinación del error o incertidumbre depende del tipo de medida: directa o indirecta.

2.- Medidas directas

Son aquellas que se obtienen por lectura directa de un instrumento de medida sin necesidad de realizar ningún cálculo.
En cualquier instrumento de medida son importantes:

∗ el campo de medida: intervalo de valores en los que el instrumento puede emplearse

∗ la precisión: coincidirá en el caso de una lectura analógica con la mínima división de la escala graduada del aparato,y en el caso de una lectura digital la precisión será el orden de la última cifra que aparezca en la pantalla de lectura

Bajo la hipótesis de que los errores sistemáticos se han eliminado, cada medida individual se verá afectada de un error accidental, por lo que al efectuar la medida de una magnitud física se deberán realizar n medidas individuales que se tratarán estadísticamente para determinar el valor esperado y el error.
Supongamos una magnitud X de la que se han realizado n medidas directas individuales y que han dado como resultado $x_i, (i = 1 \dots n)$ valores.
El valor esperado de la magnitud es igual a la media aritmética de los resultados de las medidas individuales

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

y el error absoluto o incertidumbre u_x dependerá del número de medidas realizadas:

a) En el caso de realizar un número de medidas $n < 5$ o incluso una única medida $(n = 1)$, la incertidumbre de la medida se estima conociendo la precisión del aparato de medida. Se tomará la incertidumbre obtenida como la precisión.

   Por ejemplo, si una regla tiene divisiones de 0,5 mm y hemos obtenido una medida de 28,5 mm, se tomará la incertidumbre como la precisión, expresando la medida $L = 28,5 \pm 0,5\,\text{mm}$.

b) Si el número de medidas es mayor que 5 y la sensibilidad del aparato es grande, se dará la media de los resultados obtenidos tras las n medidas, siempre suponiendo que se han realizado en las mismas condiciones de repetibilidad, es decir,

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

   Si la sensibilidad es pequeña bastará con una medida.

   La incertidumbre u_x coincide con el error cuadrático absoluto dado por:

$$u_x = \Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2 + (x_2 - \langle x \rangle)^2 + \cdots}{n(n-1)}}$$

   El resultado del experimento será, en las unidades correspondientes: $\langle x \rangle \pm u_x$

   El error relativo w_x se define

$$w_x = e(\,\%) = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \times 100 = \frac{u_x}{\langle x \rangle} \times 100$$

   que es siempre positivo y que no debe ser superior al 1 %.

3.- Medidas indirectas

Supóngase que una magnitud Y viene expresada en función de otras magnitudes $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p\}$ mediante una expresión

$$Y = f(X_1, \ldots, X_p)$$

siendo los valores esperados de las magnitudes $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p\}$, respectivamente, $\{\langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_p \rangle\}$ y $\{u_{x_1}, \ldots, u_{x_p}\}$ las incertidumbres o errores absolutos.
Se tiene entonces que el valor esperado de Y, $\langle y \rangle$, es el resultado de sustituir en la expresión dada, los valores esperados de las magnitudes $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p\}$, así

$$\langle y \rangle = f(\langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_p \rangle)$$

Por otra parte, las incertidumbres en las medidas de $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p\}$ determinan la incertidumbre correspondiente a la magnitud Y, en un proceso denominado propagación de incertidumbres. Se define la incertidumbre o error absoluto de la magnitud Y como

$$u(y) = \Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ es la derivada parcial de la función f respecto de x_i. Finalmente , la incertidumbre o error relativo

$$w(y) = \frac{\Delta y}{\langle y \rangle} \times 100 = \frac{u_y}{\langle y \rangle} \times 100$$

Ejemplo: Conociendo la incertidumbre típica del diámetro de una esfera, D, determinar la incertidumbre absoluta y la incertidumbre relativa en el cálculo de su superficie.
La superficie de una esfera en función de su diámetro está dada por $S = \pi D^2$. Su incertidumbre será

$$u_S = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial D} \right)^2 u_D^2} = (2\pi D)\, u_D \Rightarrow u_S = 2\pi D\, u_D$$

mientras que la incertidumbre relativa

$$w_S = \frac{u_S}{S} = \frac{2\pi D\, u_D}{\pi D^2} = \frac{2}{D}\, u_D$$